UNIVERSIDAD LAICA
ELOY ALFARO DE MANABÍ

EDITORIAL MAR ABIERTO

Matemáticas elementales aplicables en el campo de la ingeniería

Pedro Moya Bustillos

Colección
I.I.C

Este libro ha sido evaluado bajo el sistema de pares académicos y mediante la modalidad de doble ciego.

Matemáticas elementales aplicadas en el campo de la ingeniería

Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí (ULEAM)
Ciudadela universitaria vía circunvalación (Manta)
www.uleam.edu.ec

Departamento de Edición y Publicación Universitaria (DEPU)
Editorial Mar Abierto
Telef. 2 623 026 Ext. 255
www.marabierto.uleam.edu.ec
www.depu.uleam.blogspot.com
www.editorialmarabierto.blogspot.com

Cuidado de edición: Alexis Cuzme
Diseño de portada: Bryan Rodríguez
Diagramación: José Márquez

ISBN: 978-9942-959-80-5

Primera edición: mayo de 2017

Manta, Manabí, Ecuador.

A mi esposa Olga.

A mis hijos:
Carlos y Maricela
César y Cristina.

A mis nietos: Carlos,
Javier, Doménica,
César y Diego.

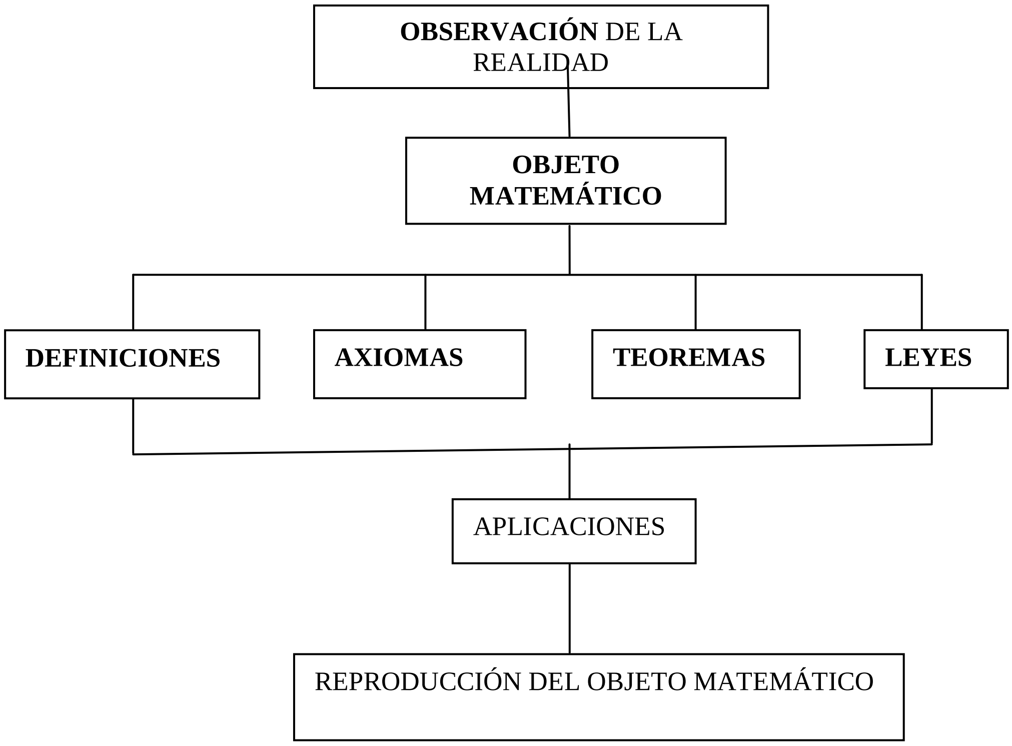
Índice

Guías de Estudio

Principales Símbolos

$\forall$ (Para todo)	# (Número)	$\exists$ (Existe un)	&(y)
$<$ (Menor que)	$\cong$ (Aproximado)	$\leq$ (Menor o igual)	$\cup$ (Unión)
$\supset$ (Contiene)	$\subset$ (Subconjunto)	$\subseteq$ (Subconjunto o igual)	$\in$(Elemento)
$\notin$ (No es elemento)	$\neg$ (Negación)	$\wedge$ (Conjunción o y)	$\vee$ (Disyunción u o)
$\Leftrightarrow$(Sí y solo sí))	$\Rightarrow$ (Implica)	$\sum$ (Sumatorio)	@(Arroba)
© (Copyright)	$\geq$ (Mayor o igual)	$>$ (mayor que)	$\neq$ (No es igual)
$\propto$ (Infinito)	f (Función)	$\equiv$ (Equivalente)	® (Registered)

Estructura Matemática



Introducción

Matemáticas elementales para administración, computación e ingenierías nace del trabajo cotidiano en la cátedra de la asignatura de matemática discreta, reflejada en el micro currículo.

Las matemáticas siempre han sido objeto de estudio de pensadores, filósofos, científicos, administradores, economistas, ingenieros, profesores, estudiantes y todas las personas que realizan diversas actividades, puesto que la matemática no se descubre sino que se crea a través de las diversas acciones desarrolladas por el hombre.

El hecho matemático existe en la mente de las personas por efecto de la observación de la realidad que mediante abstracciones se crean los objetos matemáticos, para lograr nuevas abstracciones creando la estructura matemática, cuyos pilares son las definiciones, leyes, propiedades, teoremas, axiomas, para ser aplicados en los distintos campos del quehacer humano.

Esta obra presenta varias acciones considerando una amplia aplicación de métodos matemáticos en las labores del ser humano y para esto es fundamental desarrollar en los estudiantes un pensamiento matemático, que implique una postura crítica, reflexiva y creativa con alto grado de razonamiento que permitan comprender los avances tecnológicos del mundo moderno.

Con el fin de modelar las capacidades intelectuales, morales, éticas y en especial la responsabilidad de trabajo en grupo, cuenta con seis unidades de estudio.

La primera unidad se refiere al estudio aritmético en los sistemas de numeración, decimal, binario, octal, hexadecimal, se ilustra con operaciones resueltas de suma, resta, multiplicación y división, se complementa con seis guías de estudio para fortalecer el aprendizaje de la unidad de estudio.

La segunda unidad está enfocada al estudio de sistemas lógicos y conjuntos, estos dos conceptos están estrechamente relacionados, comparten propiedades similares, el estudio de las proposiciones conjuntivas, disyuntivas y negativas tienen efecto común con las operaciones de conjuntos intersección, unión y complementos, se encuentra un estudio combinado de las proposiciones conjuntivas, disyuntivas, condicionales y bicondicionales, aplicando el álgebra de proposiciones y luego transformando a operaciones de conjuntos; estas expresiones son convertidas en diagramas de Karnaugh, circuitos y compuertas lógicas, se finaliza unidad con el tema relaciones y dígrafos, elementos básicos para el estudio de las funciones matemáticas. Para afianzar conocimientos cuenta con ocho guías de estudio.

La tercera unidad se refiere a funciones matemáticas y abarca los contenidos de aplicaciones, tipo de funciones y funciones con variable real con el respaldo de ejemplos resueltos para una mejor comprensión de las/os estudiantes, para lograr visualizar el tema la representación gráfica toma mucha importancia; para evidenciar el estudio existe tres guías de trabajo.

En relación a la cuarta unidad, sistemas de ecuaciones, matrices y determinantes, este estudio toma relevancia por su aplicación en el álgebra lineal y es herramienta básica para el cálculo vectorial, se hace una revisión de métodos de igualación, sustitución, reducción, matrices y determinantes para resolver sistemas de ecuaciones con dos y tres incógnitas, se acompaña seis guías de estudio para vigorizar la enseñanza – aprendizaje.

El estudio de números complejos constituye otra herramienta elemental para las ingenierías, puesto que sus características, representación geométrica, formas, propiedades, el cálculo de las raíces complejas de números complejos, las raíces complejas de funciones cuadráticas y de funciones trigonométricas complejas de funciones hiperbólicas, moldean el pensamiento matemático, con el objetivo de mantener presente el fundamento matemático, cuenta con una guía de estudio.

Notación sigma es una unidad de refuerzo como aproximación al estudio de la integración definida se ilustra las propiedades principales y con ejemplos resueltos y propuestos.

Con el afán de compartir información adecuada en otros ámbitos, pero relacionados a la educación formativa, se ha creído necesario complementar con:

Lecturas

- Los símbolos matemáticos.
- Aristóteles y la lógica.

Facetas

- Datos históricos de la cotización del dólar (USA) en el Ecuador.

- Astrónomos descubren galaxia joven a 90 millones de años luz.
- Un asteroide se aproxima a la Tierra.
- Circuito eléctrico.
- Qué es la investigación.
- El proceso del conocimiento.
- Funciones de la investigación.
- Proceso de la investigación.
- Planeación tradicional y planeación estratégica.

Curiosidades
- Qué es la planeación
- Conozca más sobre planeación.
- Cuándo comenzó la era de las computadoras.
- Ordenadores, nuevas armas topográficas.

Diversión
- Unión de puntos.
- Quién asesinó a Vera

Vínculos
- Relaciones humanas.

171 ejemplos resueltos

24 guías de estudio. (225 ejercicios propuestos)

Unidad 1

Sistemas de Numeración

Transformación de un número de base 10 a otra base.
Sistema binario. Aritmética binaria: suma, resta, multiplicación y división.
Sistema octal. Aritmética octal: suma, resta, multiplicación y división.
Sistema hexadecimal. Aritmética hexadecimal: suma, resta, multiplicación y división.
Operaciones lógicas.

Objetivos

- Revisar las reglas y propiedades de la aritmética decimal para sus aplicaciones en otros sistemas.

- Conseguir que los estudiantes tengan el poder de invención de operaciones para ser resueltas y luego verificadas por distintos sistemas.

- Adquirir el material teórico necesario y poner en práctica mediante la discusión grupal para resolver distintos problemas lógicos que se dan en informática.

- Resolver problemas de sistemas de numeración presentados en los grupos de trabajo, mediante el análisis, la discusión y la reflexión.

Los símbolos matemáticos

Los egipcios (1700 a. de C) ya utilizaban los símbolos matemáticos; la suma se representaba por dos piernas que caminaban en el mismo sentido y la resta por dos piernas que caminaban en sentido contrario. En cambio, no encontramos ningún símbolo en los griegos que escribían todos los razonamientos con letras. Fueron los matemáticos del siglo XV, VI y VII los que introdujeron el cálculo simbólico.

Los actuales símbolos + y - , que aparecieron en 1489 en una aritmética del alemán *Jean Widman* d´Eger fueron generalizados por *Michael Stifel* en 1544 en su tratado de Algebra Aritmética Integra. El signo radical es del alemán *Cristolf Radolf*, en 1526. El signo x es más reciente: el primero se encuentra en los textos del inglés *William Oughtred* (1637). Los signos mayor que, y menor que, también se deben a un inglés, *Thomas Harriot* (1631). La utilización de las cifras en exponente para designar las potencias se debe al filósofo francés René Descartes, en 1637, y la idea de los exponentes negativos a Jhon Wallis (1656).

Libro mundial de los inventos,

Ediciones Junior S. A. Grupo Grijalbo S. A. Santafé de Bogotá 1992

1. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

1.1 GENERALIDADES

Todo sistema de numeración se identifica por su base y raíz, cada dígito tiene valor por su posición, en donde los más significativos están a la izquierda. Si la base es N los dígitos del sistema son N contando desde cero, así por ejemplo 0, 1, 2, 3, . . .N – 1., en donde el dígito más significativo es 1 menos que la base. El valor de un número está dado por los dígitos que forman parte, según su ubicación y multiplicados por la base a la i, donde i es la ubicación a partir de cero.

$$D_4 \quad D_3 \quad D_2 \quad D_1 \quad D_0 \;|$$

$$V = D_3B^3 + D_2B^2 + D_1B^1 + D_0$$

$$V = \sum_{i=0}^{n} D_i B^i$$

Al tratar con un número fraccionario, los dígitos se distribuyen así:

$$\ldots D_1 \quad D_0 \quad D_{-1} \quad D_{-2} \quad D_{-3} \ldots$$

$$V = D_1B^1 + D_0B^0 + D_{-1}B^{-1} + D_{-2}B^{-2} + D_{-3}B^{-3}$$

En general con n enteros y m fracciones

$$V = \sum_{i=0}^{n} D_i B^i + \sum_{-1=j}^{m} D_i B^j$$

Esta es la forma general para expresar el valor de un número en cualquier sistema de numeración.

1.2 SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

Es conocido como sistema arábigo, inicialmente desarrollado por los árabes y difundido en Europa y resto del mundo, su nombre es el **Sistema de Numeración Decimal.**

BASE: 10

Tiene 10 dígitos y son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Para ilustrar con mayor claridad la posición de cada dígito, veamos en el número 475

$475 = 4 * (10)^2 + 7* (10)^1 + 5* (10)^0$

V =	$D_3\,(10)^3$	+	$D_2\,(10)^2$	+	$D_1\,(10)^1$	+	D_0
	miles		Centenas		decenas		unidades

Ejemplo 1.1: identificar la posición del dígito en 541,32

El número está formado por enteros y fraccionarios: $N = N_e + N_f.$

$N = [5 * (10)^2 + 4 + 10]^1 + 1] + [3 * (10)^{-1} + 2 * (10)^{-2}]$

Generalizando:

$$\boxed{\mathbf{V = D_2\,(10)^2 + D_1\,(10)^1 + D_0\;(10)^0 + D_{-1}\,(10)^{-1} + D_{-2}\,(10)^{-2}}}$$

APLICACIONES

Este proceso se puede aplicar a diferentes sistemas de numeración.

Sea el sistema de numeración en base 5. Los dígitos son: 0, 1, 2, 3, 4.

Ejemplo 1. 2: Convertir el número 213_5 al sistema de base 10

Solución:

$213_5 = 2 * 5^2 + 1 * 5^1 + 3 * 5^0$

$= 50 + 5 + 3$

$= 58$ (en BASE 10)

Sea el sistema de numeración en base 3. Los dígitos son: 0, 1, 2.

Ejemplo 1.3: Convertir el número 112.21_3 al sistema de base 10

Solución:

$112.21 = [1 * 3^2 + 1 * 3^1 + 2 * 3^0] + [2 * 3^{-1} + 1 * 3^{-2}]$

$= [9 + 3 + 2] + [2/3 + 1/9]$

$= 14.777...$

La representación del sistema de numeración en este caso no siempre tiene un valor finito, como se observa la conversión al sistema decimal es infinita.

De esto se desprende, el trabajo de operaciones aritméticas con cualquier sistema de numeración.

TRANSFORMACIÓN DE UN NÚMERO DE BASE 10 A OTRA BASE.

Para convertir un número de base 10 a otra base entera (B_E), se divide en forma sucesiva entre la base entera, hasta dar por terminada la operación, considerando los residuos de las divisiones sucesivas, el último cociente es el dígito más significativo de la B_E, seguido de los residuos. En el ejemplo siguiente se puede apreciar tal transformación.

Ejemplo 1.4: Transformar 34 de base 10 al sistema de numeración de base 3.

Solución:

$34 \div 3 = 11$ con residuo **1**

$11 \div 3 = 3$ con residuo **2**

$3 \div 3 = 1$ con residuo **0**

El cociente **1** es el dígito más significativo. Por lo tanto.

El número 34 de base 10 es equivalente a 1021 en base 3

Para verificar, se emplea los pasos siguientes:

$1 * 3^0 = 1$

$2 * 3^1 = 6$

$0 * 3^2 = 0$

$1 * 3^3 = 27$

Total = 34

PARTE FRACCIONARIA

Tratándose del número de base 10: 64.25 transfórmese a un número de base 5. El entero 64 se divide en forma sucesiva por 5 y la fracción 0.25 se multiplica por 5, considerando el entero respectivo como un dígito del sistema de base 5, repitiendo el procedimiento en forma sucesiva. El proceso es el siguiente:

Parte entera

$64 \div 5 = 12$ con residuo **4**

$12 \div 5 = 2$ con residuo **2**

El cociente **2** es el dígito más significativo

Parte fraccionaria

0.25 * 5 = **1**.25

1 es el dígito significativo

0.25 * 5 = **1**.25

1 es el dígito significativo

Por lo tanto:

64.25 = 224.11…$_5$

Como se observa el número de dígitos en la parte fraccionaria no es finita.

Realizando la operación inversa:

224.11_5

$1 * 5^{-2} = 1/25 = 0.04$

$1 * 5^{-1} = 1/5 = 0.2$

$4 * 5^{0} = 4$

$2 * 5^{1} = 10$

$2 * 5^{2} = 50$

Total = 64.24

1.3 SISTEMA BINARIO

BASE: 2

DIGITOS: 0, 1

Este sistema de numeración ha sido desarrollado para la construcción de computadoras y minicomputadoras por la facilidad en la operatividad de sus dígitos, logrando entrar al conocimiento de circuitos eléctricos con gran comodidad.

Potencias de base 2

$2^5 = 32$

$2^4 = 16$

$2^3 = 8$

$2^2 = 4$

$2^1 = 2$

$2^0 = 1$

$$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

CONVERSIÓN DE BINARIO A DECIMAL

$1011_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 11$

Con fracciones

$1011.1101_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2} + 0 * 2^{-3} + 1 * 2^{-4}$

$= 11.8125$

DE DECIMAL A BINARIO

Enteros

Continúas divisiones por dos, hasta que haya solo residuo.

Ejemplo 1.5: Transformar 18 al sistema binario

Solución:

18 = 18/2 = 9 con el resto 0

9/2 = 4 con el resto 1

4/2 = 2 con el resto 0

2/2 = 1 con el resto 0

El último cociente 1 es el dígito más significativo, seguido de los restos o residuos 0, 0, 1, 0. Entonces

$18 = 10010_2$

Fracciones

Ejemplo 1.6: Transformar 34,125 al sistema binario
Solución: $34 = 100010.001_2$

La parte entera de divide entre 2 en forma sucesiva, de la forma siguiente:

Proceso:

$$\begin{aligned}
&34 = 100010\\
&34 \div 2 = 17 \quad con \quad residuo \quad 0\\
&17 \div 2 = 8 \quad con \quad residuo \quad 1\\
&8 \div 2 = 4 \quad con \quad residuo \quad 0\\
&4 \div 2 = 2 \quad con \quad residuo \quad 0\\
&2 \div 2 = 1 \quad con \quad residuo \quad 0
\end{aligned}$$

, el último cociente 1, seguido de los residuos 00010, representa el entero

La parte fraccionaria 0,125, se multiplica por 2

0,125 x 2 = 0,25, el 0 es una cifra significativa

0,25 x 2 = 0,5, el 0 es una cifra significativa

0,5 x 2 = 1,0, el 1es la última cifra significativa

Por lo que 001, representa la parte fraccionaria

Por lo tanto: $34 = 100010.001_2$, es la solución

Facetas

COTIZACIÓN DEL DÓLAR DE ESTADOS UNIDOS DE AMÉRICA EN EL MERCADO NACIONAL

Período	***SISTEMA FINACIERO*** **Final del período**	
	Compra	Venta (en sucres)
1987	245,75	248,75
1988	500,00	512,50
1989	656,00	668,10

1990	883,50	899,50
1991	1280,50	1301,50
1992	1843,50	1846,94
1993	2040,84	2043,78
1994	2277,17	2279,69
1995	2924,50	2926,05
1996	3631,74	3633,85
1997	4337,00	4340,00
1998	5294,85	5402,94
1999	11316,84	11547,82
2000	25000	

Fuente: Banco Central del Ecuador. 2000

RECUERDOS

Período	*Precio del dólar en sucres*
1913	2,09
1914	2,11
1916	2,23
1922	4,27
1924	5,03
1928	5,00
1940	16,70
1941	15,00
1942	14,39
1943	14,10
1944	14,03
1945	13,50
1946 – 1949	13,50 mercado oficial
1950 – 1960	14,85 mercado oficial
1961 – 1969	17,82 mercado oficial
1970 – 1972	24,75 mercado oficial
1973 – 1981	24,80 mercado oficial

GUÍA DE ESTUDIO 1

Objetivo

Analizar los elementos teóricos del sistema de numeración decimal y relacionar con otros sistemas de numeración de base distinta.

Actividades

En grupo de tres estudiantes, analizar, discutir y encontrar la solución de las cuestiones que se dan a continuación.

1. Los números mayores o iguales a 10 y menores o iguales a 20, expresar en forma binaria y terciaria.

2. Convertir de decimal a base 7
   a. 32
   b. 45
   c. 56
   d. 34,5
   e. 75,8
   f. 240,75

3. Convertir de binario a decimal
   a. 11011_2
   b. 1111001_2
   c. 1101.11_2
   d. 111.101_2

4. Escriba los dígitos correspondientes a los sistemas de base 5, 7 y 9.

5. Escriba una cantidad con tres dígitos de base 5 y transforme al sistema decimal.

6. Escriba una cantidad con dos dígitos de base 7 y transforme al sistema decimal.

7. Escriba dos dígitos de base 9 y transforme al sistema decimal y de este al sistema binario.

8. De su propia invención escriba tres números de dos dígitos cada uno del sistema de base 5 y transforme al sistema decimal y de este al sistema octal.

   SUGERENCIA:

   De los ejercicios realizados trate de hacer verificaciones con el fin de reflexionar y criticar los distintos aspectos que se den en el interior de cada uno de los sistemas.

1.3.1 ARITMÉTICA BINARIA

1.3.1.1 SUMA BINARIA

Para realizar la suma binaria es importante considerar la siguiente regla:

1+1 = 0, llevando 1 dos

1 + 1 + 1 = 1, llevando 1 dos

1 + 1 + 1 + 1 = 0, llevando 1 dos + 1 dos

1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1, llevando 1 dos + 1 dos

Es importante tener presente las equivalencias de los dígitos decimales en binario.

Ejemplo 1.7: Suma en binario con cantidades enteras

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & 1 & 0 & 1_2 \\
 & & 0 & 1 & 0_2 \\
+ & & 1 & 1 & 1_2 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0_2
\end{array}
$$

Ejemplo 1.8: Suma en binario cantidades enteras y fraccionarias

$$\begin{array}{r} 101,01_2 \\ 110,11_2 \\ +\ 011,10_2 \\ 100,10_2 \\ \hline 10100,00_2 \end{array}$$

La solución es: $10100,00_2$

Se puede verificar con el sistema decimal

$$\begin{array}{rcr} 101,01_2 & \rightarrow & 5,25 \\ 110,11_2 & \rightarrow & 6,75 \\ 011,10_2 & \rightarrow & 3,50 \\ 100,10_2 & \rightarrow & 4,50 \\ & & 20,00 \end{array}$$

Luego, se verifica que $10100,00_2 = 20,00$

1.3.1.2 RESTA BINARIA

La resolución de la operación resta se rige por procedimientos similares a la resta o diferencia decimal.

Recordando el procedimiento de la resta decimal

Ejemplo 1.9:

Restar 394 de 432, con el procedimiento tradicional de llevadas el resultado es 38. La misma operación se puede realizar utilizando los complementos a 10 y 9.

Solución:

Aplicando el complemento a 10 al sustraendo, se tiene:

El complemento a 10 de 394 es 606, este valor sumando a 492 (minuendo), se obtiene:

$$\begin{array}{r} 4\ 3\ 2 \\ +\ 6\ 0\ 6 \\ \hline 1\ 0\ 3\ 8 \end{array}$$

El 1 del extremo izquierdo carece de significación

Mediante la utilización del complemento a 9, la operación tiene el proceso siguiente:

El complemento a 9 de 394 es 605, este valor sumado 492 es:

$$\begin{array}{r} 4\ 3\ 2 \\ +\ 6\ 0\ 5 \\ \hline 1\ 0\ 3\ 7 \\ +\ \ \ 1 \\ \hline 3\ 8 \end{array}$$

Se observa que el 1 del extremo izquierdo se suma a 37, obteniendo el resultado final 38.

La resta binaria tiene similar procedimiento, es decir se utiliza el complemento a 2 y complemento a 1.

Ejemplo 1.10: Dados los números 1101_2 y 101010_2. Encontrar los complementos 1 y 2

Solución:

El complemento a 1 de 1101_2 *es* 0010_2

El complemento a 1 de 101010_2 *es* 010101_2

Para encontrar el complemento a dos, se suma 1 al complemento a 1, esto es:

El complemento a 2 de 1101_2 *es* 0011_2

El complemento a 2 de 101010_2 *es* 010110_2

TABLA

DECIMAL	BINARIO	COMPLEMENTO A 1	COMPLEMENTO A 2
0	0000	1111	0000
1	0001	1110	1111
2	0010	1101	1110
3	0011	1100	1101
4	0100	1011	1100
5	0101	1010	1011
6	0110	1001	1010
7	0111	1000	1001
8	1000	0111	1000

Ejemplo 1.11: Aplicando los complementos 1 y 2, encontrar el resultado de la resta binaria:

De $1\ 0\ 1\ 1,\ 0\ 1\ 1_2$ restar $1\ 1\ 0\ 1,\ 1\ 1\ 0_2$

Solución:

Aplicando el complemento 1, se tiene:

$$
\begin{array}{r}
1\ 0\ 1\ 1,\ 0\ 1\ 1_2 \\
-\quad 1\ 1\ 0\ 1,\ 1\ 1\ 0_2 \rightarrow c_1\, 0\ 0\ 1\ 0,\ 0\ 0\ 1_2
\end{array}
$$

Sumando al minuendo el complemento a 1,

$$
\begin{array}{r}
1\ 0\ 1\ 1,\ 0\ 1\ 1_2 \\
0\ 0\ 1\ 0,\ 0\ 0\ 1_2 \\
\hline
1\ 1\ 0\ 1,\ 1\ 0\ 0_2 \\
+\quad 1_2 \\
\hline
1\ 0\ 1,\ 1\ 0\ 1_2
\end{array}
$$

Solución: $\boxed{1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1_2}$

Aplicando el complemento 2

$1\ \ 0\ \ 1\ \ 1,\ \ 0\ \ 1\ \ 1_2$

$1\ \ 1\ \ 0\ \ 1,\ \ 1\ \ 1\ \ 0_2 \rightarrow c_2\, 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0,\ \ 0\ \ 1\ \ 0_2$

Sumando al minuendo el complemento a dos, se tiene:

$$
\begin{array}{r}
1\ \ 0\ \ 1\ \ 1,\ \ 0\ \ 1\ \ 1_2 \\
0\ \ 0\ \ 1\ \ 1,\ \ 0\ \ 1\ \ 0_2 \\
\hline
1\ \ 1\ \ 0\ \ 1,\ \ 1\ \ 0\ \ 1_2
\end{array}
$$

El 1 del extremo izquierdo, no tiene valor, por lo tanto:

Solución es: $\boxed{1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1_2}$

La resta binaria aplicando reglas básicas

$$
\begin{array}{l}
0_2 - 0_2 = 0_2 \\
1_2 - 0_2 = 1_2 \\
0_2 - 1_2 = 1_2 \rightarrow con \quad acarreo \quad negativo \quad de \quad 1 \\
\qquad\qquad el \quad resultado \quad es \quad 2_{10} - 1_{10} = 10_2 - 1_2 \\
1_2 - 1_2 = 0_2
\end{array}
$$

Ejemplo 1.12: Restar $0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1_2$ de $1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1_2$

Solución:

$$
\begin{array}{rl}
 & {}^{1}1\ \ {}^{1}1\ \ {}^{1}0\ \ 0\ \ 1_2 \\
- & 0\ \ {}^{0}1\ \ {}^{1}1\ \ 1\ \ 1_2 \\
\hline
 & 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0_2
\end{array}
$$

La resta binaria cuando el minuendo es menor que el sustraendo con aplicaciones de los complementos 1 y 2

Ejemplo 1.13. Restar $1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1_2$ de $1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0_2$

Solución:

Para asignar el signo, se partirá con 0 para la cantidad positiva y 1 para la cantidad negativa.

Aplicando el complemento a 1 al sustraendo, se tiene:

$$\begin{array}{cc|cccccl}
S & & 1 & 1 & 1 & & & \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0_2 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0_2 & \leftarrow \boxed{\text{Complemento a 1}} \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0_2 & \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1_2 & \rightarrow \boxed{\text{Resultado}}
\end{array}$$

Se observa que en la columna del signo, el resultado es negativo por la condición antes señalada, al ser así, hay que encontrar nuevamente el complemento a 1, obteniendo el resultado $0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1_2$ pero, con signo negativo.

Se puede verificar con el sistema decimal: 46 – 61 = - 15

Ejemplo 14. Restar $1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1_2$ de $1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0_2$, aplicando el complemento a 2.

Solución:

$$\begin{array}{cc|cccccl}
S & & 1 & 1 & 1 & & & \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0_2 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1_2 & \leftarrow \boxed{\text{Complemento a 2}} \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1_2 & \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0_2 & \leftarrow \boxed{\text{Complemento a 1}} \\
 & & & & & + & 1_2 & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1_2 & \leftarrow \boxed{\text{Complemento a 2}} \rightarrow \boxed{\text{Resultado}}
\end{array}$$

CURIOSIDADES

Qué es planeación

Chamba M. Marlon & Mogrovejo C. Jorge. (19971) mencionan a León C. Hegginson. Donald C. Mosley & Paul H. Pietri. "El término planeación es muy antiguo", se encuentra desde "hace muchos siglos". "La planeación se ha practicado desde que la gente comenzó a pensar en las futuras implicaciones de las opciones corrientes de acción. ¿Qué otra cosa puede explicar la construcción de las pirámides y de otras maravillas de la antigüedad?" (p.75). Con el tiempo el significado del término ha cambiado.

Para que cualquier tipo de planeación sea efectiva, por lo menos deben contestarse estas seis preguntas.

1. ¿Qué tiene que hacerse?
2. ¿Dónde se hará el trabajo?
3. ¿Cuándo tiene que hacerse el trabajo?
4. ¿Cómo se hará el trabajo?
5. ¿Por qué debe hacerse?
6. ¿Quién va a hacer el trabajo? (Chamba, 1997, p.78)

La planeación mejora el desempeño y conduce al progreso.
Discuta en grupo de tres estudiantes y saque conclusiones sobre planeación. ¿Usted ha planeado el estudio de temas de matemáticas?

GUÍA DE ESTUDIO 2

Objetivo

Evidenciar aprendizajes significativos en el manejo de operaciones de suma y resta del sistema binario.

Actividades

Trabaje en forma individual, una vez concluidas las actividades reúnase con un compañero/a y discuta los procesos que ha seguido para encontrar la solución.

1. Encontrar el complemento a 10 y el complemento a 9 entre el 20 y el 30.

2. Obtener el complemento a 2 y el complemento a 1 de los números:

   a. 111010_2
   b. 0101100_2
   c. 10111.101_2
   d. 10101.1011_2

3. Dados los números 45, 56, 67, transforme al sistema binario y realice la suma. Verifique con el sistema decimal.

4. Dado los números 12,3; 25,5 y 34,8. Transforme al sistema binario y efectúe la suma. Verifique en el sistema decimal. Sugerencia: trabajar con al menos tres dígitos fraccionarios en el sistema binario.

5. Restar 110100.01_2 de 01111.101_2. Comprobar con el sistema decimal.

6. Restar 101011.101_2 de 1101111.100_2

7. Aplicando el complemento a 10, realice las operaciones siguientes:

   a. 43 – 26
   b. 345 – 245
   c. 12532 – 10763
   d. 125000 – 11000

8. Aplicando el complemento a 9 efectúe las operaciones siguientes:
    a. 234 – 154
    b. 3467 – 2345
    c. 25734 – 14875
    d. 305673 – 214536
9. Transforme al sistema binario el ejercicio 8 (a) y resuelva aplicando el complemento a 1

10. El complemento a 10 de 3456, es: _____
    a. 6543
    b. 6554
    c. 6544
    d. 6535

11. El complemento a 2 de 101011_2 , es: _____
    a. 010100_2
    b. 010101_2
    c. 010110
    d. Ninguna de las anteriores.

12. El complemento a 9 de 57832, es: ______
    a. 42158
    b. 42267
    c. 42167
    d. 42159

13. El complemento a 1 de 111100010_2 , es: _____
    a. 000011011_2
    b. 000011100_2
    c. 000011101_2
    d. Ninguna de las anteriores.

14. Los complementos se utilizan para las operaciones de: _____
    a. Suma
    b. Resta
    c. Multiplicación
    d. En todas las anteriores

Facetas

Después de la lectura, comente en grupo de tres estudiantes sobre el contenido del mismo y construya una red conceptual, luego de respuesta a la pregunta ¿Hay multiplicación y división de las estrellas en el universo?

Astrónomos descubren galaxia joven a 90 millones de años luz*

Los astrónomos han descubierto el objeto más distante del universo: una galaxia joven situada unos 90 millones de años luz más allá de la Tierra que cualquier otro previamente conocido.

El descubrimiento de la galaxia, bautizada 0140+326RD1 o RD1, podría contribuir a responderlas dos preguntas que más intrigan a los astrónomos: cuándo y cómo se formaron las galaxias.

A causa de la enorme distancia y a la velocidad constante de la luz, los astrónomos observan ahora la galaxia como era cuando el universo tenía solo 6% de su edad actual, unos 820 millones de años después del llamado "Big Bang".

La luz de RD1, descrita como una galaxia promedio con una masa y luminosidad menor que nuestra Vía Láctea, ha viajado una distancia de unos 12.220 millones de años luz hasta la Tierra.

"Es un descubrimiento extremadamente excitante porque sabemos muy poco de esta etapa del universo, es decir, de los objetos de entonces, o como se formar las galaxias", dijo el científico Arjun Dey, de la Universidad Jhon Hopkins, en Baltimore.

Dey publicará su descubrimiento en el próximo número de la revista *Astrophisical Journal Letters.*

Los astrónomos Hyron Spinrad, Daniel Stern y James R. Graham, de la Universidad de California en Berkeley, Frederic H- Chaffe, del observatorio W. M. Keck de Hawai, colaboraron en el informe científico.

"Tratamos de encontrar galaxias jóvenes, que ulteriormente se transformarán en otras como la que vivimos, pero muestran las primeras etapas de la formación de estrellas" dijo Dey en una nota divulgada por Jhon Hopkins.

Los científicos pueden determinar la distancia de una galaxia midiendo la velocidad con que se aleja de nosotros en el universo de expansión. Las galaxias más distantes se alejan con mayor rapidez, un fenómeno observado a finales de la década de 1920 por el astrónomo estadounidense Edwin Hubble.

*Reuters. Actualidad EL UNIVERSO. Pág. 2; 14 de marzo de 1998-

1.3.1.3 MULTIPLICACIÓN BINARIA

Para multiplicar en el sistema binario hay que tener presenta la siguiente regla:

1x1 = 1

1x0 = 0

0x1 = 0

0x0 = 0

Ejemplo 1.15: Multiplicar: $1\ \ 1\ \ 0\ \ 1_2\, x\ \ 1\ \ 0\ \ 1_2$

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 1 & 1 & 0 & 1_2 \\
 & & & x & 1 & 0 & 1_2 \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_2
\end{array}
$$

Convirtiendo al sistema decimal se puede verificar el proceso

$1101_2 = 13$

$101_2 = 5$

$13 * 5 = 65$

Ejemplo 1.16: Multiplicación con fracciones $111{,}01_2\, x 11{,}01_2$

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & & & 1 & 1 & 1, & 0 & 1_2 \\
 & & & & x & 1 & 1, & 0 & 1_2 \\
\hline
 & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 1, & 1 & 0 & 0 & 1_2
\end{array}
$$

Verificando en el sistema decimal, $7{,}25 * 3{,}25 = 23{,}5625$

1.3.1.4 DIVISIÓN BINARIA

La división es la operación inversa de la multiplicación

Ejemplo 1.17: Tomando el ejemplo 9, encuentre la solución de $1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1_2 \div 1\ 1\ 0\ 1_2$

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_2 & \big|\ 1\ 0\ 1_2 \\
-1 & 0 & 1 & & & & & \ \ 1101_2 \\
\hline
& 1 & 1 & 0 & & & & \\
-& 1 & 0 & 1 & & & & \\
\hline
& & & 1 & 0 & 1 & & \\
& & -& 1 & 0 & 1 & & \\
\hline
& & & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

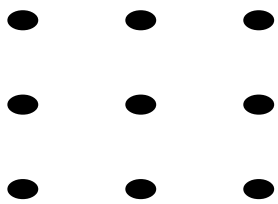
La solución es: $1\ 1\ 0\ 1_2$

Diversión grupal

UNIÓN DE PUNTOS

Este problema de unir puntos constituye una de las terapias más comunes y tradicionalmente en la actividad estudiantil, hay mucha gente que desconoce.

¿Usted es capaz de unir los nueve puntos, usando solamente cuatro segmentos de recta y sin retirar el lápiz del papel? Realice la prueba



GUÍA DE ESTUDIO 3

Objetivo

Patentizar el proceso de la multiplicación y la división en el sistema binario.

Actividades

En equipo de tres estudiantes, resuelva los ejercicios que se dan a continuación, una vez verificados sus resultados, crear 6 distintos ejercicios: resolver y verificar sus resultados.

1. En el sistema decimal 250 entre 5.

2. Los datos del ejercicio 1. Convierta al sistema binario, divida en este sistema y compare los resultados.

3. En el sistema decimal divida 35,45 entre 3,5.

4. Con los datos del ejercicio 3. Convierta al sistema binario, divida en este sistema y compare los resultados.

5. Realice tres ejercicios de su creatividad, con la experiencia obtenida reflexione y comente con sus compañeros/as.

6. Multiplique y el resultado divida por uno de los factores en las operaciones siguientes:

   a. $111110_2 \quad \textit{por} \quad 1101_2$
   b. $11101.101_2 \quad \textit{por} \quad 111_2$
   c. $1111.11_2 \quad \textit{por} \quad 101.1_2$
   d. $100111_2 \quad \textit{por} \quad 11.01_2$

7. La multiplicación de 14 x 12, el resultado en el sistema binario es: _____

a. 10101010_2
b. 10101000_2
c. 10101001_2
d. 10111000_2

8. La multiplicación de 18,5 por 6,25, el resultado en el sistema binario es: ______

a. $1110100{,}101_2$
b. $1110010{,}101_2$
c. $1110011{,}001_2$
d. $1110011{,}101_2$

9. La multiplicación de 1101.101_2 por $1{,}110_2$, el resultado en el sistema decimal es: __

a. 23,84375
b. 23,83375
c. 23,84275
d. 23,86375

10. La multiplicación de 7,5 por $1{,}11_2$, es: _____

a. $1101{,}010_2$
b. $1101{,}101_2$
c. $1101{,}001_2$
d. $1101{,}011_2$

11. La multiplicación de $1011{,}11_2$ por 3,5, es: _____

   a. 41,025
   b. 41,125
   c. 41,625
   d. 41,075

12. Multiplique en el sistema decimal, luego transforme cada uno de los factores al sistema binario y resuelva con el mismo operador (*)

   a. 25 por 12

   b. 12.5 por 3.4

   c. 45.5 por 2.5

   d. 8.12 por 0.5

   e. 7,525 por 1,125

1.4 SISTEMA DE NUMERACIÓN OCTAL

BASE: 8

DÍGITOS: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

VALOR GENERAL

$$V_{10} = D_3 * 8^3 + D_2 * 8^2 + D_1 * 8^1 + D_0 * 8^0 + D_{-1} * 8^{-1} + D_{-2} * 8^{-2} + \ldots$$

Conversión del sistema decimal a octal y viceversa

Para realizar la conversión del sistema decimal a octal, se divide en forma sucesiva el número decimal entre 8.

Potencias de base 8

$8^2 = 64$

$8^1 = 8$

$8^0 = 1$

$8^{-1} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

$8^{-2} = \frac{1}{64} = 0{,}015625$

Ejemplo 1.18: Convertir 105 al sistema octal

Solución:

$$\begin{array}{rl|ll}
105 & \multicolumn{1}{|l}{8} & & \\ \cline{2-2}
25 & 13 & \multicolumn{1}{|l}{8} & \\ \cline{3-3}
1 & 5 & 1 &
\end{array}$$

$105 = 151_8$

Conversión del sistema octal a decimal

$$1\ \ 5\ \ 1_8$$

$$1x8^0 = 1$$
$$5x8^1 = 40$$
$$1x8^2 = 64$$
$$105$$

Conversión del sistema binario a octal y viceversa

Se recomienda tener presente las equivalencias siguientes:

$0\ \ 0\ \ 0_2 = 0_8$	$1\ \ 0\ \ 0_2 = 4_8$
$0\ \ 0\ \ 1_2 = 1_8$	$1\ \ 0\ \ 1_2 = 5_8$
$0\ \ 1\ \ 0_2 = 2_8$	$1\ \ 1\ \ 0_2 = 6_8$
$0\ \ 1\ \ 1_2 = 3_8$	$1\ \ 1\ \ 1_2 = 7_8$

Ejemplo 1.19: Dado el número $1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1_2$, transformar al sistema octal.

Solución:

Considerando las equivalencias anteriores se nota que tres cifras del sistema binario son igual a un dígito octal, por lo tanto partiendo de derecha a izquierda se divide en períodos de tres cifras.

$$1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1_2 = 5\ \ 3\ \ 3_8$$

Ejemplo 1.20: Dado el número binario $1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1,\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1_2$, transforme al sistema octal.

Solución:

$$1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1,\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1_2 = 7\ 1\ 3,\ 5\ 6_8$$

En la agrupación del extremo izquierdo del número binario se observa que existen 2 dígitos 1 1, como la dirección de la agrupación es hacia la derecha, entonces se completa con un cero.

Ejemplo 1.21: Dado el número $2\ 6\ 5\ 3\ 7_8$, transformar al sistema binario

Solución:

Considerando que un dígito octal, equivale a tres dígitos del sistema binario, se tiene:

$$2\ 6\ 5\ 3\ 7_8 = 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1_8$$

Ejemplo 1.22: Dado el número $3\ 5\ 7,\ 2\ 3_8$, transformar al sistema binario

Solución:

$$3\ 5\ 7,\ 2\ 3_8 = 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1,\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1_2$$

1.4.1 ARITMÉTICA OCTAL

1.4.1.1 Suma

Ejemplo 1.23: Encuentre el valor de la suma en la operación:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1_2 \\ +\qquad 6\ 4 \\ 3\ 5\ 7_8 \\ \hline \end{array}$$

Solución:

Se observa que existen tres sumandos con distinta base (binario, decimal y octal), para esto hay realizar las conversiones respectivas en los dos primeros.

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 0 & 1 & 5_8 \\
 & 1 & 0 & 0_8 \\
+ & 3 & 5 & 7_8 \\
\hline
 & 4 & 7 & 4_8
\end{array}
$$

> Punto de Apoyo
> Sumar 7 + 5 = 12; en 12 hay un ocho y sobran 4, el cuatro se escribe y se lleva 1 ocho

A solución es: $4 \quad 7 \quad 4_8$

Ejemplo 1.24. Dada la operación suma, resuelva en octal y el resultado verificar con el sistema binario.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 1 & 1 & 0, & 1 & 1_2 \\
 & & 3 & 2, & 5 & 0_8 \\
+ & & 5 & 6, & 2 & 5 \\
 & 0 & 1 & 1, & 1 & 0_2 \\
\hline
\end{array}
$$

Solución:

Para efectuar la suma en el sistema octal, hay que convertir los sumandos escritos en binario y decimal a octal.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 6, & 6 & 0_8 \\
 & & 3 & 2, & 5 & 0_8 \\
+ & & 7 & 0, & 2 & 0_8 \\
 & & & 3, & 4 & 0_8 \\
\hline
 & 1 & 3 & 5, & 1 & 0_8
\end{array}
$$

Verificación

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
 & & & & 1 & 1 & 0, & 1 & 1 & 0_2 \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0, & 1 & 0 & 1_2 \\
+ & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0, & 0 & 1 & 0_2 \\
 & & & & & & 1 & 1, & 1 & 0 & 0_2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1, & 0 & 0 & 1_2
\end{array}
$$

Los períodos que están señalados demuestran que corresponde a: $1\ 3\ 5,\ 1\ 0_8$

1.4.1.2 Resta

La operación resta octal es similar al sistema decimal, para la ejecución del proceso se puede aplicar el complemento a 8 y complemento a 7

Ejemplo 1.25: Re*star* $5\ 7\ 6_8$ *de* $4\ 6\ 2\ 1_8$

Solución:

a) La operación en forma directa

$$\begin{array}{rcccc} & 4 & 6 & 2 & 1_8 \\ - & & 5 & 7 & 6_8 \\ \hline & 4 & 0 & 2 & 3_8 \end{array}$$

R = $4\ 0\ 2\ 3_8$

Para su verificación se puede sumar la diferencia con el sustraendo

b) Aplicando el complemento 7

$$\begin{array}{rccccc} & & 4 & 6 & 2 & 1_8 \\ + & & 7 & 2 & 0 & 1_8 \\ \hline & 1 & 4 & 0 & 2 & 2_8 \\ & & & & + & 1 \\ \hline & & 4 & 0 & 2 & 3_8 \end{array}$$

Número 1 que debe ser sumado a las unidades

Complemento a 7

Solución

c) Aplicando el complemento a 8

Número tiene valor significativo

$$\begin{array}{rccccc} & & 4 & 6 & 2 & 1_8 \\ + & & 7 & 2 & 0 & 2_8 \\ \hline & 1 & 4 & 0 & 2 & 3_8 \end{array}$$

Complemento a 8

Solución

1.4.1.3 Multiplicación

Ejemplo 1.26: Multiplicar 256_8 *por* 71_8

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 2 & 5 & 6_8 \\
 & & x & 7 & 1_8 \\
\hline
 & & 2 & 5 & 6 \\
2 & 3 & 0 & 2 & \\
\hline
2 & 3 & 2 & 7 & 6_8
\end{array}
$$

R= 23276_8

(El resultado el lector puede verificar realizando una multiplicación en el sistema binario)

1.4.1.4 División

La división es una operación inversa de la multiplicación.

Del ejemplo 1.26 dividir 23276_8 entre 256_8

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
- & 2 & 3 & 2 & 7 & 6 & 2\;5\;6_8 \\
\cline{7-7}
 & 2 & 3 & 0 & 2 & & 7\;1_8 \\
\cline{2-5}
 & 0 & 0 & 2 & 5 & 6 & \\
 & & - & 2 & 5 & 6 & \\
\cline{4-6}
 & & & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

R = 71_8

Ejemplo 1.27: Dividir $11677{,}42_8 \div 247{,}1_8$

Solución:

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
- & & 1 & 6 & 7 & 7 & 4 & 2_8 & \; 2\;4\;7\;1\;0_8 \\ \cline{9-9}
 & 0 & 7 & 6 & 5 & 3 & 0 & & \; 3\;6,\;2_8 \\ \cline{2-7}
 & - & 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & \\
 & & 1 & 7 & 5 & 2 & 6 & 0 & \\ \cline{3-8}
 & & 0 & 0 & 5 & 1 & 6 & 2 & 0 \\
 & & - & & 5 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ \cline{5-9}
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

GUÍA DE ESTUDIO 4

Objetivo

Fortalecer los conocimientos de la suma, resta, multiplicación y división en el sistema octal.

Actividades

Individualmente realice las actividades siguientes:

1. Multiplicar $345_8 \quad por \quad 25_8$. Compruebe convirtiendo al sistema binario.

2. Multiplicar $346.2_8 \quad por \quad 4.3_8$. Verifique resolviendo en el sistema binario.

3. De su propia creación realice por lo menos tres operaciones de multiplicación en el sistema octal y compruebe con los sistemas binarios y decimal.

4. Diseñe mediante algoritmos el proceso de las operaciones aritméticas en el sistema octal.

En equipos conformados con tres estudiantes, resuelva en el sistema octal las operaciones siguientes:

5. $1111.101_2 \quad por \quad 101.01_2$

6. $34 \quad por \quad 25_8$

7. $101001.11_2 \quad por \quad 12$

8. $1101.101_2 \quad por \quad 23_8$

9. $125 \quad por \quad 3.5_8$

10. $36.5_8 \quad por \quad 25$

11. $45.8_8 \quad por \quad 4.5_8$

12. $(24 \div 25) \quad por \quad 1101_2$

13. $(235_8 - 145_8) * 76_8$

14. $(56 - 42)(45_8 - 36_8)$
15. $(111.1_2 - 101.01_2)(43_8 - 25_8)$

16. $(45_8 - 111.1_2)(25 - 1011_2)$

17. Desde el ejercicio 5 hasta el 16, el producto resultante divida entre uno de los factores, de esta manera verifica la operación.

18. El resultado de multiplicar $1101{,}101_2$ por $5{,}4_8$, es: _____

    a. $1001010{,}10101_2$
    b. $112{,}64_8$
    c. $1001010{,}11101_2$
    d. $112{,}74_8$

19. Dados los sumandos $110{,}11_2$, $5{,}5_8$ y $12{,}5$, el resultado de la suma es: ____

    a. $30{,}4_8$
    b. $11000{,}101_2$
    c. $30{,}5_8$
    d. $11000{,}110_2$

20. El resultado de restar $5{,}2_8$ de $1101{,}101_2$, es: _____

a. 10000.11_2
b. $10{,}3_8$
c. $10{,}2_2$
d. $1000{,}001_2$

21. El resultado de dividir $32{,}54_8$ entre $111{,}101_2$, es: _____

a. $3{,}4_8$
b. $4{,}3_8$
c. $11{,}01_2$
d. $11{,}11_2$

1.5 SISTEMA HEXADECIMAL

BASE: 16

DIGITOS: 0, 1, 2, …9, A, B, C, D, E, F

POTENCIAS DE BASE 16

$$16^3 = 4096$$
$$16^2 = 256$$
$$16^1 = 16$$
$$16^0 = 1$$
$$16^{-1} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$
$$16^{-2} = \frac{1}{256} = 0{,}00390625$$

1.5.1 RELACIONES DE LOS DÍGITOS HEXADECIMALES CON OTROS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

HEXADECIMAL	OCTAL	BINARIO	DECIMAL
0	0	0000	0
1	1	0001	1
2	2	0010	2
3	3	0011	3
4	4	0100	4
5	5	0101	5
6	6	0110	6
7	7	0111	7
8	10	1000	8
9	11	1001	9
A	12	1010	10
B	13	1011	11
C	14	1010	12
D	15	1101	13
E	16	1110	14
F	17	1111	15

1.5.2 ARITMÉTICA HEXADECIMAL

1.5.2.1 SUMA HEXADECIMAL

Para realizar la suma hexadecimal, hay que tomar en cuenta procedimientos similares a otros sistemas de numeración.

Ejemplo 1.28: sumar las cantidades siguientes: $41A2_{16}$; $B240_{16}$ y $2F03_{16}$

Solución:

$$\begin{array}{rcccc} & 4 & 1 & A & 2_{16} \\ & B & 2 & 4 & 0_{16} \\ + & 2 & F & 0 & 3_{16} \\ \hline 1 & 2 & 2 & F & 5_{16} \end{array}$$

R = $122F5_{16}$

1.5.2.2 RESTA HEXADECIMAL

Ejemplo 1.29: Restar $7 \quad B \quad C_{16}$ de $A \quad 3 \quad 1_{16}$

Solución:

$$\begin{array}{rccc} & A & 3 & 1_{16} \\ - & 7 & B & C_{16} \\ \hline & 2 & 7 & 5_{16} \end{array}$$

R = $2 \quad 7 \quad 5_{16}$

Ejemplo 1.30: Restar $7 \quad A, \quad 4_{16}$ de $C \quad 2, \quad 1_{16}$

Solución:

$$\begin{array}{rccc} & C & 2, & 1_{16} \\ - & 7 & A, & 4_{16} \\ \hline & 4 & 7, & D_{16} \end{array}$$

R = $4 \quad 7, \quad D_{16}$

1.5.2.3 MULTIPLICACIÓN HEXADECIMAL

Ejemplo 1.31: Multiplicar $A \quad 2 \quad 3_{16}$ por 4_{16}

Solución:

$A \quad 2 \quad 3_{16} * \quad 4_{16} = 2 \quad 8 \quad 8 \quad C_{16}$

R= $2 \quad 8 \quad 8 \quad C_{16}$

Ejemplo 1.32: Multiplicar $C\ 1\ 1_{16}$ por $3\ 2_{16}$

Solución:

$$\begin{array}{r} C\ 1\ 1_{16} \\ 3\ 2_{16} \\ \hline 1\ 8\ 2\ 2 \\ 2\ 4\ 3\ 3\ \\ \hline 2\ 5\ B\ 5\ 2_{16} \end{array}$$

R = $2\ 5\ B\ 5\ 2_{16}$

1.5.2.4 DIVISIÓN HEXADECIMAL

Ejemplo 1.33: Dividir $2\ 5\ B\ 5\ 2_{16}$ entre $C\ 1\ 1_{16}$

Solución:

$$\begin{array}{rl} 2\ 5\ B\ 5\ 2_{16} & \underline{|\ C\ 1\ 1_{16}} \\ -\ 2\ 4\ 3\ 3\ & \ \ 3\ 2_{16} \\ \hline 0\ 1\ 8\ 2\ 2 & \\ -\ 1\ 8\ 2\ 2 & \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0 & \end{array}$$

R = $3\ 2_{16}$

Las reglas utilizadas en los sistemas de numeración estudiados servirán para que el lector aplique en ejercicios de su propia creación, a su vez ayuda a fortalecer el conocimiento y el lenguaje matemático.

GUÍA DE ESTUDIO 5

Objetivo

Vincular los elementos teóricos de las operaciones de sus, resta, multiplicación y división aplicando en los sistemas binarios, octal y hexadecimal.

Actividades

En equipo de cuatro estudiantes trabaje en las cuestiones que se dan a continuación:

1. Multiplique $34B.6_{16} * 43_{16}$ y su resultado divida por uno de los factores $34B.6_{16} o 43_{16}$

2. Una vez realizadas las conversiones respectivas al sistema hexadecimal divida $345.7_8 \quad entre \quad 11101.110_2$

3. De su propia creatividad escriba dos números enteros, uno en el sistema decimal y otro en el sistema binario, convierta al sistema hexadecimal y divida el primer número entre el segundo. Verifique en los sistemas binario y octal.

4. Resuelva en los sistemas decimal, binario, octal y hexadecimal las divisiones siguientes:

   4.1 $110101.001_2 \quad entre \quad 35.5$

   4.2 $345 \quad entre \quad 35_8$

   4.3 $3B6.5_{16} \quad entre \quad 34_8$

   4.4 $2345.7_8 \quad entre \quad 75.5$

4.5 $573_8 \quad entre \quad B_{16}$

4.6 $127.63_8 \quad entre \quad 4.C_{16}$

4.7 $345.75 \quad entre \quad 11100.1011_2$

5. Aplique reglas de comprobación para el ejercicio 4.

6. Reflexione sobre los ejercicios realizados anteriormente y emita su propio criterio.

7. Calcular en el sistema hexadecimal $110011001_2 \div (B * 0{,}4_8)$

1.6 OPERACIONES LÓGICAS

La lógica matemática comprende de operaciones como el AND y el OR que no son otra cosa que la conjunción y la disyunción; si relacionamos con la teoría de conjuntos coincide con intersección y la unión. No resulta difícil si se recuerda las operaciones de conjuntos de la intersección y la unión. (En la siguiente unidad se detallará en forma específica y con mayor amplitud los sistemas lógicos).

En efecto al considerar los conjuntos $A = \{1,3,5,7,9\}$ y $B\{1,5,6,8\}$

$A \cup B = \{1,3,5,6,7,8,9\}$

$A \cap B = \{1,5\}$

En cuanto a las proposiciones conjuntivas y disyuntivas, las tablas elementales son:

AND			OR			NAND	NOR
A	**B**	$A \wedge B$	A	B	$A \vee B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B)$
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**

1	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**

La notación NAND equivale al NOT AND, el símbolo negativo se representa por diversas formas $\neg$, ~ o en muchos casos el signo negativo $(-)$ arriba de la letra que represente la proposición o de la expresión algebraica.

Para realizar las operaciones lógicas binarias, octales, decimales y hexadecimales, se ilustra con los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.34: $19_{16} AND 1A_{16} = 18_{16}$ (Ejemplo tomado Manual Calculadora Científica Casio fx3600PA-pàg. 64)

Explicación:

$19_{16} = 11001_2$

$1A_{16} = 11010_2$

Al relacionar las cifras (elementos) de los números dados (conjuntos), se observa que la conjunción (intersección) dada es 11000_2, en el sistema hexadecimal equivale a 18_{16}

Ejemplo 1.35: $1110_2 AND 36_8 = 1110_2$ (Ejemplo tomado Manual Calculadora Científica Casio fx3600PA-pàg. 64)

Solución:

$1110_2 = 1110_2$

$36_8 = 11110_2$

La conjunción (intersección entre estos es 1110_2

Ejemplo 1.36: $23_8 OR 61_8 = 63_8$ (Ejemplo tomado Manual Calculadora Científica Casio fx3600PA-pág. 64)

Solución:

$23_8 = 10011_2$

$61_8 = 110001_2$

La disyunción (unión) entre los conjuntos es 110011_2, equivalente a 63_8

GUÍA DE ESTUDIOS 6

1. Resuelva las operaciones lógicas siguientes:

   a. $11101.101_2 \quad OR \quad 11110.11_2$

   b. $356_8 \quad OR \quad 234_8$

   c. $110101.1101_2 \quad AND \quad 432_8$

   d. $132_{16} \quad AND \quad 11101.11_2$

   e. $3AC_{16} \quad OR \quad 245_8$

   f. $39 \quad OR \quad 22_8$

   g. $125_5 \quad OR \quad 35_8$

Unidad 2

SISTEMAS LÓGICOS Y CONJUNTOS

2.1 Lógica Proposicional

2.2 La conjunción

2.3 La disyunción

2.4 Disyunción exclusiva

2.5 La condicional

2.6 La bicondicional

2.7 Diagramas de Karnaugh

2.8 Circuitos lógicos

2.9 Algebra de proposiciones y de conjuntos

2.10 Relaciones y dígrafos

Objetivos

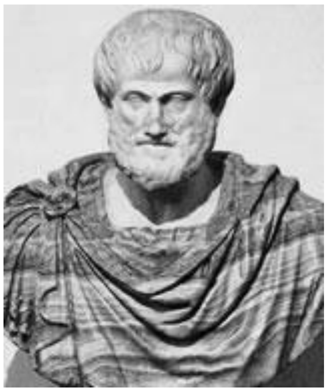
- Determinar si las proposiciones falsas o verdaderas pertenecen a la conjunción, disyunción, condicional o bicondicional.

- Elaborar tablas de verdad, diagramas de Karnaugh y circuitos lógicos y relacionar con las operaciones de conjuntos.

- Simplificar polinomios booleanos, utilizando propiedades de las proposiciones.

Lectura: lea el texto de Aristóteles y la lógica, subraye palabras clave y busque el significado de cada una de ellas. Comente en grupo de tres estudiantes.

ARISTÓTALES Y LA LÓGICA



En un pueblo de pastores y agricultores a orillas del mar Mediterráneo, en el país que hoy conocemos como Grecia, nació una de la civilizaciones más importantes de toda la historia de la humanidad, cuna de la cultura occidental. Maravillados por el conocimiento y por la estética los griegos dedicaron mucho de su tiempo a la escultura, la poesía, el teatro, la filosofía y las matemáticas.

En matemáticas y particularmente en la lógica es inevitable mencionar a Aristóteles (384 – 322 a. de C). Este griego nació en Macedonia, era ante todo un científico de vocación y un observador meticuloso de la naturaleza. La gran importancia de Aristóteles en la cultura occidental se debe al hecho de que fue él quien creó el lenguaje profesional que las distintas ciencias emplean hoy.

Para Aristóteles, el moderador de todas las actividades humanas era el pensamiento. Consideraba que no bastaba con pensar de cualquier manera para que lo pensado sirviera para algo productivo, sino que si pensaba en un tema específico, siguiendo lo que el llamó Leyes Universales, lo pensado era realmente fructífero y contribuía al desarrollo de las ciencias. A estas Leyes Universales las llamó lógica. Desde entonces, y hasta hoy, la lógica juega un papel muy importante como apoyo en el desarrollo de diversos campos de conocimiento entre ellos la filosofía, la informática y la matemática misma.

2.1 LÓGICA PROPOSICIONAL

En el diario trajinar, la comunicación es lo primero, se encuentra en el hogar, en el trabajo, deportes, etc., para expresar ideas, nombrar objetos, manifestar sentimientos escribiendo o hablando para informar, cuestionar, exclamar, exteriorizar angustias o alegrías sobre las cosas y actos que vivimos cada momento. Estas manifestaciones permiten expresar mediante oraciones enunciativas, interrogativas, imperativas y exclamativas.

En el campo matemático, particularmente en la lógica de proposiciones le interesan las oraciones enunciativas.

<u>Una proposición es una oración enunciativa o enunciado afirmativo o negativo.</u>

Ejemplo 2.1: Dadas las oraciones siguientes determinar si son verdaderas o falsas:

- El 24 de mayo de cada año se celebra la Batalla del Pichincha.

- 12 es un número primo.

- Manta es un cantón de la provincia de Manabí.

- ¡estás triste!

- Parece que va a llover

Solución: la primera es verdadera, porque es una fecha cívica en el Calendario Histórico Ecuatoriano. La segunda es falsa, porque 12 es un número divisible. La tercera es verdadera porque Manta pertenece a la división política de la provincia de Manabí. La cuarta y la quinta no se puede decir lo mismo que las anteriores, puesto que depende de la persona que lo diga, pues otra puede decir lo contrario. De lo expuesto se puede decir que:

Una proposición es un enunciado con un solo valor de verdad.

Proposiciones simples y proposiciones compuestas.

Las proposiciones tienen dos elementos: el sujeto llamado *término* y el predicado o *condición* que debe cumplir el término.

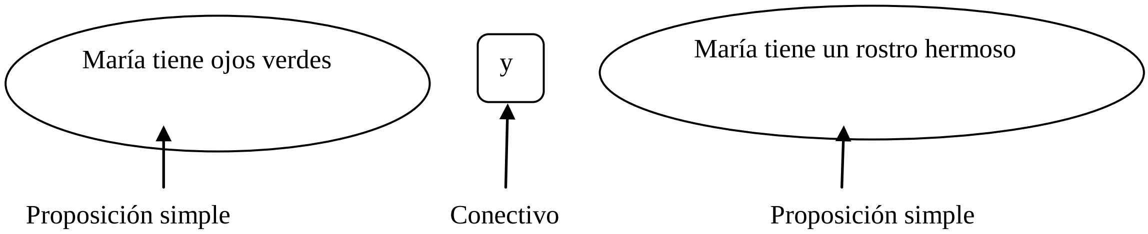
Proposición simple es la que está formada por una sola afirmación, es decir no tiene operador lógico: p: 2+2 = 4

Proposición compuesta es la que tiene dos o más enunciados con varios operadores lógicos:

Ejemplo 2.2: La Facultad de Ingeniería de Sistemas es una unidad académica de la Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí. ULEAM.

Solución:
El término es la Facultad de Ingeniería de Sistemas y el predicado es unidad académica de la ULEAM.
En nuestras actividades diarias es común expresar ideas como: María tiene ojos verdes y un rostro hermoso.

La proposición dada se puede descomponer en dos:



Este ejemplo demuestra una proposición compuesta

GUÍA DE ESTUDIO 7

Objetivo

Identificar las proposiciones simples y compuestas en el campo de la lógica proposicional.

Actividades

Lea cada uno de los literales, analice y discuta cada una de las proposiciones dadas:

1. Señale cuáles de los enunciados siguientes son proposiciones:

   a. Portoviejo es capital de Manabí.

   b. ¿Hay mucho sol?

   c. a es la primera vocal

   d. el cantante guayaquileño Julio Jaramillo L. es el rey de la balada.

2. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas.

   a. Un día tiene 24 horas.

   b. La primera letra del alfabeto griego es β

   c. Una hectárea tiene 8600 m^2

   d. La semana tiene 7 días

3. En las siguientes proposiciones identifique el término y el predicado:

   a. El número 81 es divisible por 3.

   b. La provincia de Manabí tiene 22 cantones.

   c. El símbolo químico del cloro es Cl.

   d. La moneda del Ecuador en 1998 fue el sucre.

e. La ballena es un mamífero.

f. Pedro nació en Latacunga y vive en Manta.

g. $3 \in [2,7]$

h. 5 es mayor que 3

i. – 3 es menor que 2

j. – 7 es menor que – 1

k. 2 es mayor que – 1 y menor que 5

4. Escriba seis proposiciones simples y forme tres proposiciones compuestas con los conectivos y, o.

2.1.1 NEGACÓN DE UNA PROPOSICIÓN

Matemáticas es la ciencia abundante se signos y símbolos, lo que hace que tenga un carácter exacto tanto en su escritura como en su lenguaje. Las proposiciones se simbolizan con las letras minúsculas, especialmente se usan *p, q, r, s y t*. No se descarta el uso de las letras mayúsculas A, B, C y D, cuando se trata del estudio del álgebra de proposiciones. Por el momento se utilizarán las letras minúsculas.

Ejemplo 2.3:

p: Ecuador país amazónico.

q: El cobre es un metal.

r: Manta fue una población de Montecristi.

Para negar estas proposiciones se utiliza el símbolo ¬, escribiendo antes de la letra que representa la proposición.

Del ejemplo anterior

r: Manta fue una población de Montecristi

¬*r:* Manta no fue una población de Montecristi.

Para la negación también se utilizan los símbolos ~ y el signo (-) sobre la letra, de esta forma $\overline{A}$. Puede leerse: ***no es cierto que, es falso que***, al principio de la oración o también un ***no*** antes del predicado como en el caso anterior.

La tabla de verdad para la negación es:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Escribir la negación en cada una de las proposiciones:

- El metro es una medida de longitud.
- José María Velasco Ibarra fue 5 veces Presidente del Ecuador.

- 1998 es un año devastador para el Litoral Ecuatoriano.
- El mes no tiene 30 días.
- La longitud de la circunferencia es igual a $2\pi r$
- El tiempo es una magnitud fundamental.
- La aceleración no es una magnitud derivada.
- La candela es la unidad de la magnitud fundamental intensidad luminosa.
- El kilogramo sobre metro cubico es el nombre de la unidad de densidad.
- El vatio es la unidad de potencia.

2.1.2 PROPOSICIONES ABIERTAS Y PROPOSICIONES CERRADAS

Dadas las proposiciones, analizar los contenidos.

p: El Dr. Fabián Alarcón es presidente interino del Ecuador en 1998.

q: f(x) = x + 5

La proposición *p* se refiere a una persona que es Fabián Alarcón, quien determina como presidente interino del Ecuador en 1998, lo cual es cierto. Esta proposición por lo tanto es cerrada.

La proposición *q* es una función cuya variable es x; su valor no esta determinado con exactitud. Esta proposición es abierta..

En resumen:

Una proposición es cerrada cuando el término es constante

Una proposición es abierta cuando su término es variable es decir cuando no está determinado.

Ejemplo 2.4: Identificar las proposiciones cerradas o abiertas:

- *p*: x es capital del Ecuador.
- *q*: Guayaquil es conocida como la capital económica del Ecuador.
- *r*: n es el primer puerto pesquero del Ecuador.
- *s*: f(2) = 2 + 3
- *t*: el número 21 es divisible por 3.
- *u*: m es cantón de la provincia de Manabí es la sultana del café.
- *v*: Latacunga es capital de la provincia de Cotopaxi.

Solución:
Las proposiciones *p, r* y *u* son abiertas

Las proposiciones *q, s, t* y *v* son proposiciones cerradas.

Las proposiciones abiertas pueden constituirse en cerradas sustituyendo por Quito, Manta y Jipijapa respectivamente en *p, r* y *u*.

2.1.3 PROPOSICIONES COMPUESTAS

2.1.3.1 Operadores lógicos

Los operadores lógicos son:

Conjunción	$\wedge$	y (AND)
Disyunción	$\vee$	o (OR)
Disyunción exclusiva	$\underline{\vee}$	o
Condicional	$\rightarrow$	Si … entonces
Bicondicional	$\leftrightarrow$	Si y solo si
Negación	$\neg$	No (NOT)

Cuadro 2.1

Ejemplo 2.5: Analice y busque los operadores lógicos de cada una de las expresiones siguientes:

- voy a comer o a escribir.

- El gato negro corre y maúlla

- Si María estudia matemáticas entonces va al cine.

- Un animal bala si y solo si es oveja.

Solución:
Las cuatro proposiciones están formadas cada una por dos proposiciones simples y conectadas por la disyunción o (OR), la conjunción y (AND), el condicional *entonces* y la doble condición (bicondicional) *si y solo si*. Estas constituyen las proposiciones compuestas, los símbolos están en la tabla anterior.

2.2 CONJUNCIÓN

La conjunción es una combinación de dos o más proposiciones unidas por el conectivo y.

Tabla de verdad de una conjunción, y (AND).

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 2.1

Negación de la conjunción NAND

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Tabla 2.2

Punto de Apoyo: $p \wedge q$ **se lee** ***p y q; p pero q***

2.2.1 **Conjunción negativa**

La conjunción negativa de dos proposiciones *p* y *q* está representada por: $p \downarrow q$ y se lee "ni *p*, ni *q*" o "no *p* y no *q*".

2.3 DISYUNCIÓN

La disyunción es una combinación de dos o más proposiciones conectadas por o

Tabla de verdad de una disyunción o, (OR)

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 2.3

Negación de la disyunción, NOR

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Tabla 2.4

Analice la tabla siguiente y relacione con las anteriores

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Se establece que: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$, de igual manera $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Punto de apoyo: La negación de la negación de una proposición es la misma proposición $\neg\neg p \equiv p$

Ejemplo 2.6: Sean *p*: Carlos es alto y *q*: Carlos es galán. Escribir los enunciados en forma simbólica con *p* y *q*.

a. Carlos es alto y galán.

b. Carlos es alto, pero no es galán.

c. Es falso que Carlos es bajo o galán.

d. Carlos no es alto ni galán.

e. Carlos es alto o Carlos es bajo y galán.

f. No es verdad que Carlos es bajo o que no es galán.

Solución:

a. $p \wedge q$

b. $p \wedge \neg q$

c. $\neg(\neg p \vee q)$

d. $\neg p \wedge \neg q$

e. $p \vee (\neg p \wedge q)$

f. $\neg(\neg p \vee \neg q)$

Ejemplo 2.7: Hallar la negación de cada proposición

p: El monte más elevado de América del Sur es el Aconcagua y está ubicado en Chile.

q: El domingo próximo voy a nadar o voy a jugar futbol.

Solución:
La primera conjunción es verdadera, las dos proposiciones son ciertas y su negación es: El monte más elevado de América del Sur no es el Aconcagua o éste no queda en Chile, esta disyunción es falsa.
La segunda es una proposición abierta, el valor de verdad está condicionada de lo que haga ese día; no es ni falsa ni verdadera por hoy, su negación será una conjunción. El domingo próximo voy a nadar y no voy a jugar fútbol.

Ejemplo 2.8: Analice el siguiente enunciado:
"Es falso que juan es alto y Carlos es bajo".

Solución: Este enunciado se puede escribir $\neg(p \wedge q)$ o también $\neg p \vee \neg q$

2.4 DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

El operador lógico disyunción exclusiva (o exclusivo), tiene como símbolos XOR, EOR, EXOR, $\veebar$ o $\oplus$.

En la disyunción exclusiva dos proposiciones p y q tienen un valor verdadero, si y solo si cuando:

g. *p* tiene un valor verdadero y *q* tiene y valor falso.

h. *p* tiene un valor falso y *q* tiene un valor verdadero

Tabla de verdad de la disyunción exclusiva XOR

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 2.5

Una disyunción exclusiva se puede representar utilizando disyunciones y conjunciones, de esta forma: $(p \hat{} \neg q) \vee (\neg p \hat{} q)$

Observemos estas proposiciones

- Estoy en Manta o estoy en Portoviejo
- Trabajo o voy a jugar futbol
- Pasado mañana le presto el libro a Juana o le presto a Javier

Como se ve las oraciones son acciones que solo se puede realizar una a la vez, en el primer caso no se puede estar en dos lugares a la vez

El operador Disyunción exclusiva es representado en el lenguaje java por el símbolo: **^**.

Sintaxis: ***a ^ b***

El uso de la Disyunción Exclusiva en programación se opera con números binarios:

0 XOR 0 = 0

0 XOR 1 = 1

1 XOR 0 = 1

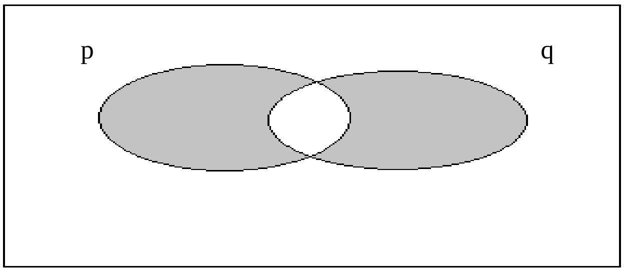
1 XOR 1 = 0

101011 XOR 110001= 011010

Ejemplo 2.9: La Empresa industrial ALES ofrecerá descuentos a sus clientes minoristas de categoría A y con residencia en Manta o a sus clientes de categoría B con residencia en Chone.

Como se puede ver un cliente de categoría A solo tiene un lugar de residencia registrado en los datos de la empresa industrial ALES.

La XOR o disyunción exclusiva se puede relacionar con la operación Unión exclusiva entre conjuntos; en el diagrama de Venn se representa, así



$p \underline{\vee} q$

2.5 Propiedades de las proposiciones conjuntivas y disyuntivas

Es necesario conocer desde aquí las leyes que se dan en el álgebra de proposiciones con el fin de familiarizar al estudiante en el manejo de las expresiones matemáticas y relacionar con leyes de las operaciones aritméticas y la de los conjuntos.

No.	**PROPIEDADES**	**CONJUNCIÓN**	**DISYUNCIÓN**
1	Idempotencia	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
2	Asociativa	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
3	Conmutativa	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
4	Distributiva de la conjunción con respecto a la disyunción $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$		
5	Distributiva de disyunción con respecto a la conjunción $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$		
6	Identidad	$p \wedge V \equiv p$	$p \vee F \equiv p$

		$p \wedge F \equiv F$	$p \vee V \equiv V$
7	Del complemento	$p \wedge \neg p \equiv F$ $\neg V \equiv F$; $\neg F \equiv V$	$p \vee \neg p \equiv V$ $\neg\neg p \equiv p$
8	De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
9	Absorción	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$
10	Equivalencia	$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ $p \Leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

Cuadro 2.2

CONEXIONES

1. El símbolo $\vee$ se puede emplear para definir la unión de dos conjuntos, así:

A $\cup$ B = {x | x $\in$ A $\vee$ x $\in$ B}

2. El símbolo $\wedge$ se puede emplear para definir la intersección de dos conjuntos, así:

A $\cap$ B = {x | x $\in$ A $\wedge$ x $\in$ B}

3. En la diferencia de conjuntos se puede aplicar el símbolo $\wedge$ por intermedio de la propiedad de equivalencia, así:

A – B = {x | x $\in$ A $\wedge$ x $\in$ B^c}

4. Para definir el complemento de um conjunto A se utiliza también el símbolo $\wedge$, así:

A^c = {x | x $\in$ Re $\wedge$ x $\notin$ A}

5. Coincidentemente muchas de las propiedades de las proposiciones llevan el mismo nombre en las operaciones de conjuntos, basta sustituir los símbolos: $\wedge$ por $\cap$, $\vee$ por $\cup$, $\neg$A por A^c, V por Re, F por ϕ, etc.

6. También se puede escribir $\wedge$ por * ; $\vee$ por +

Relación entre proposiciones, conjuntos y aritmética

Proposiciones	Conjuntos	Aritmética
$A \wedge B$	$A \cap B$	A B
$A \vee B$	$A \cup B$	A+B

Cuadro 2.3

$\neg A$	A^c
V (tautología)	Re (conjunto
F (falacia)	ϕ (conjunto
$\neg(A \wedge B)$	$(A \cap B)^c$
$\neg A \vee A$ = V	$A^c \cup A$= Re

Cuadro 2.4

Ejemplo 2.10: Dadas dos proposiciones abiertas. Encontrar la conjunción y el valor de verdad. Sean las proposiciones:

$$p(x) = x^2 - 121 = 0; \quad x \in \{Enteros(Z)\}$$

q(x) = “x es un número primo mayor que 5 y menor que 17”; $x \in \{Z\}$

Entonces,

$p(x) \wedge q(x)$ es la proposición.

Para cumplir con la proposición conjuntiva es necesario que las dos proposiciones sea verdaderas, para lo cual, el conjunto solución de $p(x)$ es $P=\{11,-11\}$; el conjunto solución de $q(x)$ es $Q=\{7,11,13\}$. Se concluye que $p(x) \wedge q(x)$es $R=\{11\}$. Es el conjunto formado por los elementos comunes en P y Q

GUÍA DE ESTUDIO 8

Objetivo

Fundamentar las propiedades de las proposiciones para la aplicación exitosa en problemas relacionados a la lógica matemática.

Actividades

En el tiempo destinado al trabajo autónomo, desarrollar los ejercicios y en lo posible verifique los resultados.

1. En los cuatro enunciados, identifique el enunciado verdadero

- Portoviejo está en Ecuador y 3 + 2 = 4
- Portoviejo está en la provincia de Esmeraldas y 3 + 2 = 5
- Portoviejo está en la provincia de esmeraldas y 3 + 2 = 4
- Portoviejo está en Ecuador y 3 + 2 =5

2. Elabore una tabla de verdad en cada proposición

   a. $\neg(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge p)$

   b. $(p \wedge \neg q) \wedge [\neg q \vee (p \wedge q)]$

   c. $\neg(A \wedge B) \vee \neg[A \wedge \neg(A \vee B)]$

3. Construya dos proposiciones compuestas con las características parecidas del numeral anterior y elabore tablas de verdad, discuta con el estudiante más cercano sobre su desarrollo y verifique sus resultados.

4. Realice un comentario personal o grupal sobre las propiedades de las proposiciones.

5. Sean p: Hace calor y q: Está lloviendo. Describir con un enunciado verbal y escrito, las siguientes proposiciones:

   a. $\neg p$ b. $\neg\neg p$ c. $\neg p \vee q$

   d. $\neg p \wedge q$ e. $\neg(p \vee q)$ f. $\neg p \wedge \neg q$

   g. $\neg(p \wedge q)$ h. $\neg\neg q$ i. $\neg p \vee \neg q$

   j.

6. Encuentre el conjunto solución de p(x) y q(x), dadas las proposiciones siguientes:

   $P(x): x^2 - 2x - 15; \quad x \in \{Enteros\}$

   $Q(x): x^2 + 10x + 25; \quad x \in \{Enteros\}$

7. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   a. No es verdad que 4 + 3 = 7 y 9 -2 = 7

   b. 25 es un número divisible por 5 y 8 no es par

   c. 15 – 7 = (5 – 3)(17 – 13) o (- 4)(2) es negativo

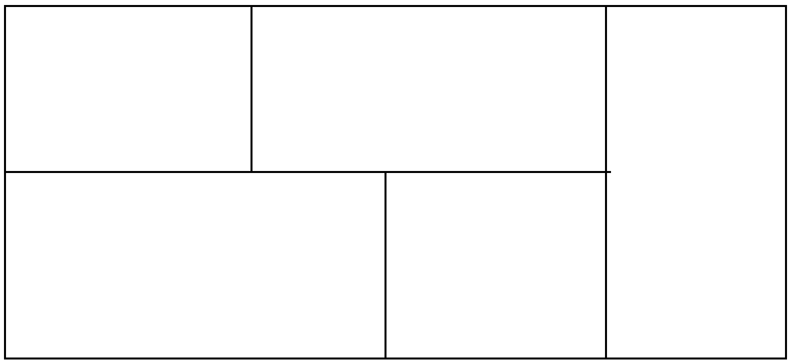
   d. Un rectángulo tiene 3 ángulos rectos o un rombo tiene tres lados desiguales

Diversión

Una vez encontrado el asesino de Vera, comente con sus compañeros/as de grupo sobre las clases de proposiciones que se dan para llegar a conocer su resultado.

¿QUIÉN ASESINÓ A VERA?

Vera, una de las protagonistas de la obra de teatro ha sido asesinada en su camerino. Los datos que se administra se refiere a la distribución de los camerinos de cada uno de los cinco actores que participan en la obra, a saber: Vera, Eusebio, Flora, Gustavo y Hortensia



1. El camerino del asesino y el de Vera, son contiguos al al mismo número de habitaciones.
2. El camerino de Vera se encuentra al lado de Eusebio y del de Flora.
3. El camerino de Gustavo y el de Hortensia tienen el mismo tamaño.
4. El camerino de Flora no es contiguo al camerino de Gustavo.

2.5 CONDICIONAL

En matemáticas generalmente encontramos expresiones como: si "x e y son números impares" *entonces* "x + y es un número par: si $x \in (A \cap B)$ entonces $x \in A \wedge x \in B$

Como se ve las dos proposiciones simples o atómicas están conectadas con la palabra entonces, si denominamos *p*: x e y son números impares; *q*: x + y es un número par, se obtiene una nueva proposición expresada por: "si *p* entonces *q*", llamada proposición condicional, cuyo símbolo es $p \Rightarrow q$; *p* es llamada *antecedente, hipótesis o premisa* y *q consecuente, conclusión o tesis*.

$p \Rightarrow q$: Se lee:

" si *p* entonces *q*", "*p* solamente si *q*", "*p* solo si *q*", "si *p*, *q*", "*q* si *p*", "*q* cuando *p*", "*q* cada vez que *p*", "*q* con la condición de que *p*", "*q* cuando *p*", " *q* ya que *p*", "*q* puesto que *p*", "*q* debido a que *p*", "*q* porque *p*", "si tiene *q* se tiene *p*", "solo si *q*, *p*", "*q* pues *p*", "cuando *p*, *q*", "los *p* son *q*", "*p* implica a *q*"; generalmente cuando en una expresión se encuentre causa y efecto.

¿Qué es una condicional?

La condicional es una operación entre dos proposiciones simples o atómicas enlazadas por el conectivo condicional *si... entonces* cuyo resultado es una proposición compuesta.

2.5.1 TABLA DE VERDAD DE LA CONDICIONAL

PUNTO DE APOYO:
$p \Rightarrow q = \neg p \vee q$

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 2.6

Ejemplo 2.11: Entre la relación, nacionalidad – nacimiento de una persona. Construir dos casos de proposiciones condicionales.

Al decir Pedro es ecuatoriano, se puede escribir: si Pedro nació en Ecuador entonces es ecuatoriano.

Al decir Juan es chileno, se puede escribir: si Juan nació en Chile entonces es chileno.

Ejemplo (Tomado de Matemáticas Básicas, ESPOL, pág. 35)

P_1: Todos los hombres son mortales

P_2: Sócrates es hombre

C: Sócrates es mortal

En este razonamiento conocido mucho tiempo, la última proposición es la conclusión a partir de las premisas dadas. Para que un razonamiento sea válido la comunicación hipotética debe cumplir

$$P_1 \wedge P_2 \Rightarrow C \quad \text{(Una tautología)}$$

En casos de razonamiento en los que las premisas son predicados con cuantificadores diremos simplemente que son válidos si los enunciados hipotéticos:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$$

Formada por las premisas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ y la conclusión C son expresiones válidas. De nuestro ejemplo, podemos encontrar los predicados.

h(x) = x es hombre

m(x) = x es mortal

Se considera que Re es el conjunto de personas y animales. Las premisas se traducen como sigue:

PUNTO DE APOYO:
$\forall x$, se lee: "para toda x"
$\exists x$, se lee: "para algún x"

$$P_1 : \forall x[h(x) \Rightarrow m(x)]$$

$$P_2 : h(S)$$

Y la conclusión $\quad C : m(S)$

Por definición, la conclusión será lógicamente válida si la expresión:

$$\forall x[h(x) \Rightarrow m(x)] \wedge h(S) \Rightarrow m(S)$$

Es válida; esto es, cualquiera sea la interpretación Re escogida la enunciación hipotética debe ser verdadera:

Para el conjunto Re decir que $\forall x[h(x) \Rightarrow m(x)] \equiv 1$, equivale a decir que $[A \neg h(x) \cup Am(x) = \mathrm{Re}]$:

$$\{\forall x[h(x) \Rightarrow m(x)] \equiv 1\} \equiv \{\forall x[\neg h(x) \vee m(x)] \equiv 1\}$$

$$\equiv A \neg h(x) \cup Am(x) = \mathrm{Re}$$

En el ejemplo, $S \in \mathrm{Re}$, por tanto:

$$S \in \mathrm{Re} \equiv [S \in A \neg h(x)] \vee [S \in Am(x)]$$

Se conoce (segunda premisa $S \in Ah(x) \equiv 1$, por lo que $S \in A \neg h(x) = 0$ y de esta manera:

$$S \in \mathrm{Re} \equiv [S \in A \neg h(x)] \vee [S \in Am(x)]$$

$\equiv 0 \vee [S \in Am(x)]$

$\equiv [S \in Am(x)]$

Es claro que $[S \in Am(x)]$ significa que m(S) es verdad. Dicho de otra manera, si el antecedente es verdadero, el consecuente seguramente lo es.

2.5.2 VARIACIONES DE LA CONDICIONAL

La condicional o implicación es una función importante en los razonamientos lógicos, los cuales son presentados en forma: directa, recíproca, contraria o inversa y contrarecìproca.

Ejemplo 2.12. Dada la proposición: Todo hombre que es mantense, es manabita. Escribir la implicación directa, recíproca contraria y contrarecìproca.

Solución:

- Todo hombre que es mantense, es manabita

  La implicación **directa** es: $p \Rightarrow q$; $v(p \Rightarrow q) = V$.

- Todo hombre que es manabita, es mantense

  Es implicación **recíproca,** simbólicamente representada por $q \Rightarrow p$; $v(q \Rightarrow p) = F$.

- Todo hombre que no es mantense, no es manabita.

  Al negar los dos elementos de la implicación directa, se obtiene la implicación **contraria o inversa:** $\neg p \Rightarrow \neg q$; $v(\neg p \Rightarrow \neg q) = F$

- Todo hombre que no es manabita, no es mantense

Al negar los elementos de la recíproca, el resultado es una implicación **contrarecìproca**: $\neg q \Rightarrow \neg p$; $v(\neg q \Rightarrow \neg p) = V$

Conclusión:

- Un enunciado condicional y su recíproco o inverso no son lógicamente equivalentes.
- Un enunciado condicional y su contrarecìproca son lógicamente equivalentes.
- Un enunciado recíproco y su inverso son lógicamente equivalentes.

Lea, analice y saque conclusiones en las tablas siguientes:

p	q	r	$p \wedge r$	$(p \wedge r) \Rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

p	q	***Condicional directa*** $p \Rightarrow q$	***Recíproca*** $q \Rightarrow p$	***Inversa*** $\neg p \Rightarrow \neg q$	***Contrarecìproca*** $\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

2.5.3 CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE

Teniendo como partida el enunciado:

Un comerciante tiene cierto número de quintales de arroz, de tal forma que: si agrupa de 2 en 2, le sobra 1, si agrupa de 3 en 3, le sobra 1, pero si agrupa de 4 en 4, no le sobran. Entonces, ¿Cuál es el número de quintales de arroz?

Razonamiento:

Se puede entender si el comerciante agrupa de 2 en 2, sobra 1, por lo cual no es múltiplo de 2, si agrupa de 3 en 3, le sobra 1, por lo tanto, no es múltiplo de 3, pero si agrupa de 4 en 4, no le sobran, por lo tanto, es múltiplo de 4.

Parece que algo no anda bien, porque el número de quintales de arroz es múltiplo de 4, también debe ser múltiplo de 2, debido a que 4 es múltiplo de 2. Luego el problema no está correctamente planteado.

Esto quiere decir que las condiciones se contradicen y el problema no tiene condiciones claras, por lo consiguiente no se puede calcular el número de quintales de arroz que tiene el comerciante.

Para ESPOL. FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS, 2006, menciona desde el punto de vista lógico, suponiendo que n es un número positivo bien definido, se tendrá la propiedad siguiente: "si n es múltiplo de 4, entonces n es múltiplo de 2, lo cual se puede expresar" $p \Rightarrow q$, donde *p*: n es múltiplo de 4 y *q*: n es múltiplo de 2.

"Al ser la proposición" $p \Rightarrow q$ verdadera, la condición "n es divisible para 4" es **<u>suficient</u>**e para que "n sea divisible para 2"; esto quiere decir, que basta que n sea divisible para 4, para que este mismo n sea divisible entre 2. Esto indica que ***p*** **"es condición suficiente para"** ***q*****.**

Por otra parte, "la condición "n es divisible para 2" es **<u>necesaria</u>** para que "n sea divisible para 4"; esto dice, que se requiere que n sea divisible entre 2, para que ese mismo n sea divisible para 4". "Esto significa que" ***q*** **"es condición necesaria para"** ***p***

Ejemplo 2.13: Las proposiciones siguientes son verdaderas:

- "Si n es divisible para 28, n es divisible para 2"
- "Si n es divisible para 14, n es divisible para 2"
- "Si n es divisible para 28, n es divisible para 14"

Parafraseando las proposiciones, se tiene:

"n es divisible para 28", **es condición suficiente para que** "n sea divisible para 2"

"n es divisible para 2", **es condición necesaria para que** "n sea divisible para 14"

"n es divisible para 14", **es condición necesaria para que** "n sea divisible para 28" (p.18)

PUNTO DE APOYO:
Cuando una proposición $p \Rightarrow q$ es verdadera, se puede parafrasear: "se necesita p para que q", "para que suceda p, es necesario que suceda a q", "q con la condición de que p", entre otras formas

Leyes de las implicaciones lógicas

FORMA SIMBÓLICA	TAUTOLOGÍA
$p \Rightarrow p$	Trivial
$p \Rightarrow (p \vee q)$	Adición
$(p \wedge q) \Rightarrow p$	Simplificación
$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$	Modus Ponendo Ponens Suposición del Antecedente
$[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$	Modus Tonendo Tollens Negación del Consecuente
$[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$	Silogismo Disyuntivo
$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$ $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$	Dilemas Constructivos
$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$	Transitividad o Silogismo Hipotético

CUADRO 2.5: Leyes de las implicaciones lógicas

Para demostrar estas propiedades, se pueden utilizar tablas de verdad o mediante la simplificación algebraica con la utilización de propiedades.

Ejemplo 2.14:

Demostrar la equivalencia lógica $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$, utilizando algebra

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q = [(\neg p \vee q) \wedge p] \Rightarrow q$$

$$= [(\neg p \wedge p) \vee (p \wedge q)] \Rightarrow q$$

$$= [F \vee (p \wedge q)] \Rightarrow q$$

$$= (p \wedge q) \Rightarrow q$$

$$= \neg(p \wedge q) \vee q$$

$$= \neg p \vee \neg q \vee q$$

$$= \neg p \vee V = V$$

Argumentos

Argumento es un conjunto de premisas seguidas por una conclusión. Un argumento puede ser falso o verdadero, y es demostrado o verificado mediante la aplicación de propiedades, tablas de verdad, diagramas de Veen, diagramas de Karnaugh, etc.

Ejemplo 2.15: Determinar si el argumento es verdadero o falso.

Si María estudia Matemáticas entonces Carlos estudia Física. Si Carlos no estudia Física entonces Manuel se dedica al atletismo. Manuel no se dedica al atletismo. Por lo tanto María no estudia Matemáticas

Solución:

p: María estudia Matemáticas

q: Carlos estudia Física

r: Manuel se dedica al atletismo

El argumento en forma simbólica es:

$[(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow r) \wedge \neg r] \Rightarrow \neg p$ Propiedad de equivalencia

$[(\neg p \vee q) \wedge (\neg\neg q \vee r) \wedge \neg r] \Rightarrow \neg p$ Propiedad de complemento

$[(\neg p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg r] \Rightarrow \neg p$ Propiedad distributiva

$\{[(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge q) \vee (q \wedge r)] \wedge \neg r\} \Rightarrow \neg p$ Propiedad distributiva

$[(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg r) \vee (q \wedge q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r \wedge \neg r)] \Rightarrow \neg p$ Idempotencia, compl.

$[(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (F) \vee (q \wedge \neg r) \vee (F)] \Rightarrow \neg p$ propiedad de identidad

$[(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)] \Rightarrow \neg p$ propiedad de equivalencia

$\neg[(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)] \vee \neg p$ Ley de Morgan

$[\neg(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \wedge \neg(q \wedge \neg r)] \vee \neg p$ Ley de Morgan

$[(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee r)] \vee \neg p$ Propiedad de absorción

$(\neg q \vee r) \vee \neg p$ Propiedad asociativa

$\neg q \vee r \vee \neg p$

El argumento no es verdadero, puesto que, realizando una tabla de valores, se tiene:

p	$\neg p$	q	$\neg q$	r	$\neg q \vee r \vee \neg p$
V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V

F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V

El resultado no es una tautología por lo tanto el argumento es falso

GUÍA DE ESTUDIO 9

Objetivo

Utilizar el conocimiento de las proposiciones condicionales para resolver ejercicios

Actividades

El estudiante en su trabajo autónomo debe resolver los ejercicios siguientes:

1. Escriba la inversa o recíproca de cada una de las siguientes expresiones:

   a. $(p \vee q) \Rightarrow r$

   b. $(p \wedge q) \Rightarrow r$

   c. $\neg q \Rightarrow r$

2. "si 4 + 6 = 10, entonces 12 - 5 = 4" es una implicación. Escriba las expresiones siguientes:

   a. La recíproca.

   b. La contraria o inversa.

   c. La Contrarecíproca

3. Encontrar el valor de verdad, mediante la elaboración de tablas, las expresiones siguientes:

   a. $(\neg\neg p \wedge q) \Rightarrow r$

   b. $(\neg p \Rightarrow \neg r) \vee \neg q$

c. $(\neg p \wedge q) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \vee \neg q]$

4. Determinar el valor de verdad de las condiciones siguientes, analizando sus cuatro posibilidades (ver tabla de la condicional):

   a. Si Ecuador prospera, entonces el Fenómeno de El Niño es derrotado.

   b. Si Barcelona Sporting Club gana en su estadio, entonces es campeón de la Copa Toyota – Libertadores de América.

   c. Si Irak respeta el anti armamentismo, entonces habrá paz en Oriente.

   d. Si el símbolo dimensional de potencia es L^2MT^{-3}, entonces en vatio es $\frac{J}{s} = m^2.kg.s^{-3}$.

5. Establecer si el siguiente razonamiento es verdadero.

   P_1: Todos los números racionales son reales.

   P_2: Ningún número real es complejo.

   C: Ningún número real es complejo.

6. Determine si los argumentos son falsos o verdaderos.

   a. Juan viaja a Portoviejo con la condición de que María viaje a Quito, entonces Juan viaja a Portoviejo.

b. Ni Roberto ni Juana aprueban el semestre, por lo tanto, Elena aprueba el semestre.

7. Escriba en forma simbólica los argumentos siguientes:

   a. El Ecuador es país amazónico y Chile es productor de cobre.

   b. Si Juan tiene dos dólares, se tiene que Zoila no va al cine. Zoila va al cine.

   c. Portoviejo es la capital de Manabí, cuando Manta es un puerto marítimo.

   d. Si Leonidas Proaño es parroquia de Montecristi y Tarqui es parroquia de Manta, debido a que Manta es Puerto pesquero.

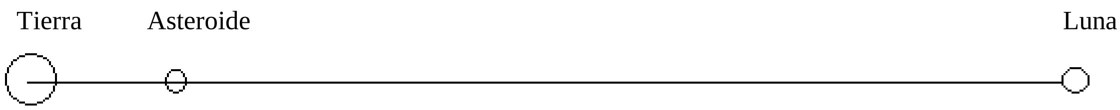
Facetas

UN ASTEROIDE SE APROXIMA A LA TIERRA

Un asteroide de 1.6 km de ancho pasará cerca de la Tierra en el 2028, advirtieron los astrónomos, podría caer sobre el planeta.
El asteroide que no había sido detectado hasta ahora; pasará a unos 42.000 km del centro de la Tierra.

Orígenes

Se cree que el asteroide procede del cinturón Marte y Júpiter.
El asteroide será visible sin gran dificultad desde el norte de Europa, pasará por la órbita de la Luna.
Llamado como asteroide 1997 XF11, estará más cerca de la Tierra a las 18H30 del jueves 26 de octubre del 2028



Distancia de la Luna a la Tierra 384.400 km

¿Qué ocurriría si cae sobre la Tierra?

- El impacto del asteroide equivaldría al de cientos de bombas atómicas.
- Millones de toneladas de materia saldrían disparadas a la atmósfera por el golpe.
- Terremotos y oleajes masivos devastarán grandes áreas.
- Residuos derretidos desencadenarían incendios de bosques en todo el globo.
- El humo taparía el Sol, lo que enfriaría el planeta y formaría lluvia ácida.

REUTER "EL UNIVERSO"
Nº 178. 19-03-98

2.6 LA BICONDICIONAL

De la lectura anterior se puede extraer el siguiente razonamiento. El planeta Tierra se enfriaría si y solo si el humo devastador tapa el Sol.

La expresión si y solo si representa a una equivalencia, cuya notación es $\Leftrightarrow$

Por lo tanto se puede decir que la equivalencia es una relación **bicondicional** entre dos proposiciones atómicas o moleculares, en otros términos existe una doble implicación, así:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Punto de apoyo:
"Proposiciones atómicas o simples son las más elementales sin conectivos de enlace". "Las proposiciones moleculares o compuestas está formadas por dos o más proposiciones atómicas

2.6.1 Tabla de verdad

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q)$	$(q \Rightarrow p)$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Tabla 2.7

Como se puede apreciar $(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

Ejemplo 2.16: Analice cada caso y verifique si se trata de una doble implicación. Establezca el valor de verdad con la respectiva notación.

a. $(5^2 = 25) \Leftrightarrow (3^2 = 9)$

b. Juan comete infracciones si y solo si es un mal conductor

Solución:

a. $p: 5^2 = 25$, el valor de verdad v(p) es V;

$q: 3^2 = 9$, el valor de verdad c(q) es V

Por lo tanto, el valor de verdad de la proposición molecular $v(p \Leftrightarrow q) = V$

b. Analicemos mediante las cuatro posibilidades:

- Si Juan comete infracciones y es un mal conductor, la bicondicional es verdadera.
- Si juan comete infracciones y es un buen conductor, la condicional es falsa.
- Si Juan no comete infracciones y es mal conductor, la bicondicional es falsa.
- Si juan no comete infracciones y es un buen conductor, la bicondicional es verdadera.

Por lo tanto, el valor de verdad $v(p \Leftrightarrow q) = V$

Ejemplo 2.17: Construir la tabla de verdad de la proposición $(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q) = y$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow \neg q$	y
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Ejemplo 2.18: Simplificar el enunciado: “No es verdad que los claveles no son rojos si y solo si las violetas son azules”.

Sean $\neg p$: los claveles no son rojos; q:las violetas son azules. El enunciado se puede escribir $\neg(\neg p \Leftrightarrow q) \equiv \neg\neg p \Leftrightarrow q = p \Leftrightarrow q$.

Esto equivale a decir que: los claveles son rojos si y solo si las violetas son azules. También se puede comprobar algebraicamente.

2.6.2 ORDEN DE LOS OPERADORES

Reglas

1. $(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow r)$ la conectiva predominante es la disyunción.

2. Si la proposición compuesta está escrita con signos de puntuación, pueden ser sustituidos por signos.

   5 + 2 = 7 o 2 + 5 = 7 y 5 + 1 = 6 se representa $(p \vee q) \wedge r$, la conectiva predominante es la conjunción.

   Si 3 + 5 = 9 entonces 2 + 7 = 9 y 4 – 2 = 1, se representa por $p \Rightarrow (q \wedge r)$, la conectiva predominante es la condicional.

3. Si no hay signos de puntuación ni paréntesis, se debe considerar con el orden de izquierda a derecha. $\neg, \frac{\vee}{\wedge}, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

   Si $p \vee q \Rightarrow \neg p$, se escribe $(p \vee q) \Rightarrow \neg p$.

4. Si la proposición no tiene signos de puntuación, ni paréntesis, hay dos casos:

   4.1 se puede indicar el orden de los operadores, e indicar cuál es el operador predominante, para escribir los signos de puntuación correspondientes.

Si en $p \wedge q \Leftrightarrow \neg p$, la conjunción es el conector predominante; se representa $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p$.

Si en $\neg p \Rightarrow q \vee r$, la negación es el operador predominante, se representa $\neg[p \Rightarrow (q \vee r)]$

4.2 si la proposición tiene el mismo operador o de igual fuerza, se pueden dibujar los paréntesis de izquierda a derecha.

Si $p \Rightarrow q \Rightarrow \neg p \Rightarrow r$, se escribe de esta forma $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p] \Rightarrow r$

Si $r \vee t \wedge r \wedge t$, se escribe $[(r \vee t) \wedge r] \wedge t$

GUÍA DE ESTUDIO 10

Objetivo

Afianzar conocimiento relacionados a las proposiciones condicionales y bicondicionales para mantener el dominio lógico de proposiciones.

1. De la lectura "UN ASTEROIDE SE APROXIMA A LA TIERRA", construya 3 proposiciones bicondicionales.

2. Demostrar mediante una tabla de verdad que:

   $p \wedge q$ Implica lógicamente $p \Leftrightarrow q$ o sea $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow p)$

3. Demostrar que $p \Leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$`en una tabla de verdad.

4. Establezca el valor de verdad en las proposiciones moleculares siguientes:

   a. $(x = 5) \Leftrightarrow (x^2 = 25)$

   b. $(a + b = 5) \Leftrightarrow (b = 3)$

   c. $(x = 4) \Leftrightarrow (x + 3 = 7)$.

5. Con un compañero/a de aula construya dos proposiciones moleculares y elabore una tabla de verdad.

6. Lea un artículo en uno de los periódicos (rotativos locales o nacionales) comente en una reunión de trabajo y construya tres proposiciones y analice la doble condicional en sus cuatro posibilidades.

7. En un taller de matemáticas escriba una proposición molecular en función de la conjunción, disyunción y la bicondicional. Elabore una tabla de verdad.

8. Identifique el conector preponderante y luego simplifique las expresiones siguientes:

   a. $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [q \Rightarrow \neg p]] \Rightarrow q$

   b. $[(q \Leftrightarrow p) \Rightarrow r] \wedge [(r \Leftrightarrow p) \wedge \neg r]$

   c. $[(r \Rightarrow s) \wedge \neg(r \vee s)] \vee [(r \Leftrightarrow s) \wedge \neg s]$

9. En las expresiones del ejercicio 8 demuestre con tablas de verdad los resultados obtenidos.

10. De su propia creación escriba tres expresiones, tomando como modelo el ejercicio 8, simplifique y verifique los resultados con tablas de verdad.

ALFABETO GRIEGO

Α α *a* *alfa*	Β β *b* *beta*	Γ γ *g* *gamma*	Φ ϕ *f* *fi*	Δ δ *d* *delta*
Ε ε *e* *èpsilon*	Ζ ζ *ds* *zeta*	Η η *e* *eta*	Θ θ *th* *theta*	Ι ι *i* *iota*
Κ κ *k* *kappa*	Λ λ *l* *lambda*	Μ μ *m* *mu*	Ν ν *n* *nu*	Ξ ξ *x* *xi*
Ο o *o* *òmicron*	Π π *p* *pi*	Ρ ρ *r* *rho*	Σ σ *s* *sigma*	Τ τ *t* *tau*
Υ υ *u* *ipsilon*	Χ χ *j* *ji*	Ψ ψ *ps* *psi*	Ω ω *o* *omega*	

A partir del siglo IV, este alfabeto es empleado en general en toda Grecia, de este se derivan los distintos alfabetos europeos.

Los términos alfa y omega aparecen en el Apocalipsis, refiriéndose a Dios es: “principio y fin de todo”.

Muchas letras mayúsculas y minúsculas son utilizadas en matemáticas, estadística y física para representar: planos, segmentos, fórmulas algebraicas, etc.

Curiosidades

Cuándo empezó la era de las computadoras

Al iniciar el siglo XIX en 1822, el científico inglés Charles Babbage inventó una máquina diferencial, que permitía cálculos de las funciones trigonométricas y logarítmicas usando tarjetas Jacquard.

En 1834, desarrolló una máquina analítica para realizar operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división, mediante el almacenamiento de datos en una memoria (de hasta 1000 números de 50 dígitos) e imprimir los resultados.

El proyecto no pudo llevarse a la práctica por falta de medios. Al cabo de varios años se consiguió finalmente producir los “relais”, dispositivos electrónicos que permitieron cálculos mil veces más rápidos que los de las máquinas de Babbage. Un paso decisivo lo constituyó el descubrimiento de las válvulas, es decir, de los dispositivos electrónicos que permitieron aumentar más aún la rapidez de los cálculos. El invento de los transistores, en 1948, condujo al mejoramiento. Las velocidades a las que se efectúan las operaciones sobrepasan hoy millones de millones de veces superiores a las de la máquina inventada por Babbage

https://es.wikipedia.org/wiki/Charles_Babbage

http://www.dosideas.com/noticias/actualidad/446-charles-babbage-el-padre-de-las-computadoras

2.7 DIAGRAMAS DE KARNAUGH

Al igual que en la Teoría de Conjuntos, para la representación gráfica se utiliza los diagramas de Veen, el estudio de las proposiciones se ve ampliada con los polinomios booleanos. George Boole, lógico y matemático inglés autor del “Retículo distributivo complementado”, llamado también “algebra de Boole”.

Estos polinomios pueden ser representados gráficamente en los diagramas de Karnaugh que consisten en un conjunto de celdas, éstas dependen del número de proposiciones. La distribución de las celdas está contemplada, si:

Es una proposición el número de celdas son $2^1 = 2$

Hay dos proposiciones, el número de celdas son $2^2 = 4$

Hay tres proposiciones, el número de celdas son $2^3 = 8$

En general: si hay n proposiciones, el número de celdas son 2^n.

El diagrama de Karnaugh conocido también como diagrama de Veitch o Mapa – K (Mapa-KV) utilizado para simplificación de expresiones booleanas, fue inventado por el físico y matemático Maurice Karnauh en 1950, fue integrante de los laboratorios Bell.

Los mapas o diagramas de Karnaugh, son herramientas utilizadas para la simplificación de circuitos lógicos.

Una de las formas de representar los mapas diagramas es esta:

	A	
B	$AB\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$
B, C	ABC	$\overline{A}BC$
C	$A\overline{B}C$	$\overline{A}\,\overline{B}C$
	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

AB	$\overline{A}B$
$A\overline{B}$	$\overline{A}\,\overline{B}$

A	$\overline{A}$

Diagrama 2.1

Leyenda: A proposición positiva; $\overline{A}$ proposición negativa.

B proposición positiva; $\overline{B}$ proposición negativa.

C proposición positiva; $\overline{C}$ proposición negativa

Las proposiciones negativas como se observa están representadas por un signo negativo sobre la letra.

Tratándose de cuatro proposiciones

	A		B	
C	$A\overline{B}C\overline{D}$	$ABC\overline{D}$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$
	$A\overline{B}CD$	$ABCD$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}\overline{B}CD$
D	$A\overline{B}\overline{C}D$	$AB\overline{C}D$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$
	$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$AB\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$

Diagrama 2.2

Otra forma de utilizar los diagramas o mapas de Karnaugh es:

A \ BC	00	01	11	10
0	000_2 0	001_2 1	011_2 3	010_2 2
1	100_2 4	101_2 5	111_2 7	110_2 6

Diagrama 2.3

La primera fila A: corresponde a 0

La segunda fila A: corresponde a 1

La primera columna BC: B = 0 y C = 0

La segunda columna BC: B = 0 y C = 1

La tercera columna BC: B = 1 y C = 1

La cuarta columna BC: B = 1 y C = 0

Para la simplificación se debe observar que el resultado de la tabla tenga el numeral 1, formar grupos con celdas adyacentes (no diagonales) en forma horizontal o vertical.

Los polinomios booleanos pueden ser expresados como funciones en forma normal conjuntiva y forma normal disyuntiva.

$F : (x + y`)(x`+y)(x`+y`)(x + y)$ *forma normal conjuntiva*

$F : xy`+x`y + x`y`+xy$ *forma normal disyuntiva*

Mapas con tres variables XYZ

Dado el polinomio $F : X`Y`Z`+X`Y`Z + X`YZ + XY`Z`$, represente en el mapa de Karnaugh

X \ YZ	$Y`Z`$	$Y`Z$	YZ	$YZ`$
$X`$	1	1	1	
X	1			

Diagrama 2.4

En el mapa se observa que la primera columna de celdas de color verde no hay cambio de $Y`Z`$; en las celdas pintadas de azul no hay cambio en $X`Z$, dando lugar a una simplificación del polinomio.

El resultado es: $X`Z + Y`Z`$

Mapas con cuatro variables ABCD

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Diagrama 2.6

Cabe recordar las propiedades de las proposiciones y la relación que tienen con los conjuntos y muy coincidentemente con algunas expresiones del álgebra. Se ilustra la relación en la siguiente tabla:

PROPOSICIONES	CONJUNTOS	ALGEBRA
$A \wedge B$	$A \cap B$	$A * B \quad o \quad AB$
$A \vee B$	$A \cup B$	$A + B$
$A \vee \neg A$	$A \cup A^c$	$A + \overline{A}$
$A \wedge \neg A$	$A \cap A^c$	$A\overline{A}$
$\neg(A \wedge B)$	$(A \cap B)^c$	$\overline{AB}$

Cuadro 2.7

Ejemplo 2.19: Dado el polinomio $y = (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ o $y = A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

a. Representar en el mapa de Karnaugh.

b. Escribir como operación de conjuntos.

c. Representar en un diagrama de Venn

Solución:

a.

BC / A	$\overline{B}\overline{C}$ 00	$\overline{B}C$ 01	BC 11	$B\overline{C}$ 10
$\overline{A}$ 0	1		1	
A 1	1			

Explicación

Se observa que las celdas de color verde son las que representan al polinomio booleano:

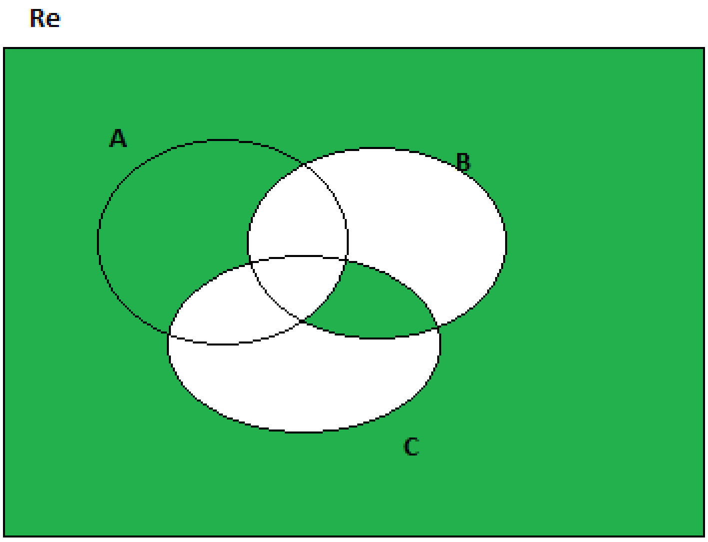
0 0 0, correspondiente a la fila y columna de $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, es el valor de verdad es 1 o verdadero.

1 0 0, corresponde a la fila y columna de $A\overline{B}\overline{C}$, el valor de verdad es 1 o verdadero.

0 1 1, corresponde a la fila y columna de $\overline{A}BC$, el valor de verdad es 1 o verdadero.

b. $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

c. Representación en el diagrama de Veen



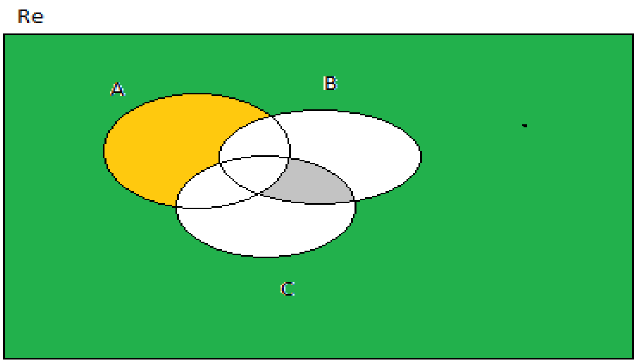
2.7.1 RELACIÓN CON LOS CONJUNTOS

Se había mencionado anteriormente que el estudio de las proposiciones tiene una relación íntima con los conjuntos, para resaltar esta precisión se tomó el polinomio booleano y se realizó las sustituciones respectivas de acuerdo a la tabla anterior. Aplicando el método gráfico se puede establecer las áreas correspondientes de esta operación de conjuntos, cuyo signo preponderante es la unión, el resultado es:

$\left(A \cap B^c \cap C^c\right)$ Color amarillo

$\left(A^c \cap B \cap C\right)$ Color gris

$\left(A^c \cap B^c \cap C^c\right)$ Color verde



Su verificación puede darse realizando la operación de conjuntos paso a paso o dando elementos a los conjuntos A, B y C.

Ejemplo 2.20: dado el polinomio booleano $y = \bar{A}\overline{\bar{B}C} + AB\bar{C} + \overline{ABC}$. Encuentre:

1. La representación gráfica en el diagrama de Karnaugh.
2. La expresión transformada en operación de conjuntos.

Solución:

BC \ A	$\overline{B}\,\overline{C}$ 00	$\overline{B}C$ 01	BC 11	$B\overline{C}$ 10
$\overline{A}$ 0				
A 1				

a) $\overline{B}C$

BC \ A	$\overline{B}\,\overline{C}$ 00	$\overline{B}C$ 01	BC 11	$B\overline{C}$ 10
$\overline{A}$ 0				
A 1				

b) $\overline{\overline{B}C}$

BC \ A	$\overline{B}\,\overline{C}$ 00	$\overline{B}C$ 01	BC 11	$B\overline{C}$ 10
$\overline{A}$ 0				
A 1				

c) $\overline{A}\,\overline{\overline{B}C}$

BC \ A	$\overline{B}\,\overline{C}$ 00	$\overline{B}C$ 01	BC 11	$B\overline{C}$ 10
$\overline{A}$ 0				
A 1				

d) $AB\overline{C}$

BC \ A	$\overline{B}\,\overline{C}$ 00	$\overline{B}C$ 01	BC 11	$B\overline{C}$ 10
$\overline{A}$ 0				
A 1				

e) AB

BC \ A	$\overline{B}\,\overline{C}$ 00	$\overline{B}C$ 01	BC 11	$B\overline{C}$ 10
$\overline{A}$ 0				
A 1				

f) $\overline{AB}$

BC / A	$\overline{B}\,\overline{C}$ 00	$\overline{B}C$ 01	BC 11	$B\overline{C}$ 10
$\overline{A}$ 0				
A 1				

g) $\overline{A}\overline{B}C$

BC / A	$\overline{B}\,\overline{C}$ *00*	$\overline{B}C$ *01*	BC *11*	$B\overline{C}$ *10*
$\overline{A}$ *0*	1	1	1	1
A *1*		1		1

h) **Solución**

2) La expresión transformada en operación de conjuntos

$$\left[A^c \cap \left(B^c \cap C\right)^c\right] \cup \left(A \cap B \cap C^c\right) \cup \left[\left(A \cap B\right)^c \cap C\right]$$

GUÍA DE ESTUDIO 11

Objetivo

Interpretar las propiedades de las proposiciones y de los conjuntos, observadas en los mapas de Karnaugh y en los diagramas de Veen.

Actividades

En el tiempo destinado para el trabajo autónomo, resuelva los ejercicios que se dan a continuación:

1. Represente en los diagramas de Karnaugh, los polinomios booleanos siguientes:

   a. $y = A\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$

   b. $y = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B$

   c. $y = \overline{A}BCD + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\overline{D}$

   d. $y = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{BC} + \overline{A}\overline{B}C$

   e. $y = \left(\overline{A} + \overline{B} + C\right)\left(A + \overline{B} + \overline{C}\right)$

   f. $y = \left(AB + \overline{A}\overline{B}\right)\left(\overline{A}\overline{B} + \overline{A}B\right) + \left(A\overline{B} + \overline{A}\right)$

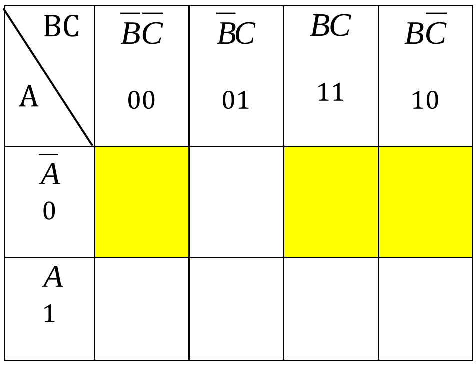
   g. $y = \left(ABC + AB\overline{C}\right)\left(\overline{A}B + \overline{B}C\right)$

   h. $g = \left(XY\overline{Z} + \overline{X}YZ\right)\left(\overline{XY}Z + \overline{\overline{XYZ}}\right)$

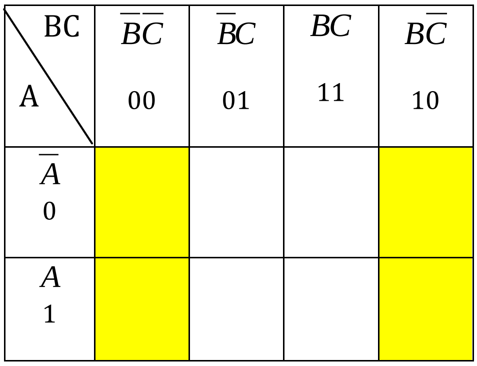
2. Transforme los polinomios booleanos de la pregunta 1 en operaciones de conjuntos. Resuelva gráficamente en los diagramas de Veen.

3. Construya tres operaciones de conjuntos y transforme en polinomios booleanos. Compruebe los resultados.

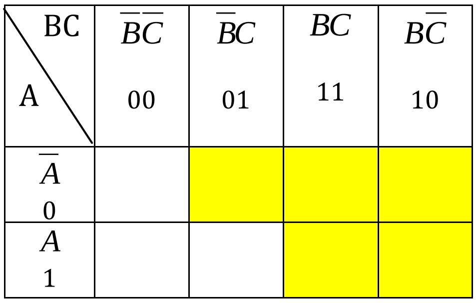
4. En los mapas de Karnaugh siguientes: Identifique los términos booleanos (celdas coloreadas) y construya polinomios.



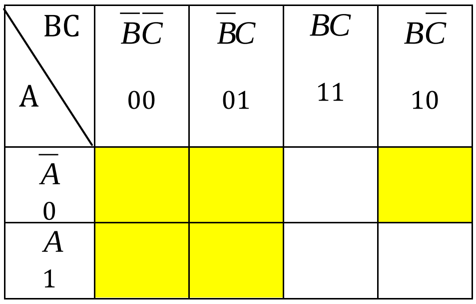
a)



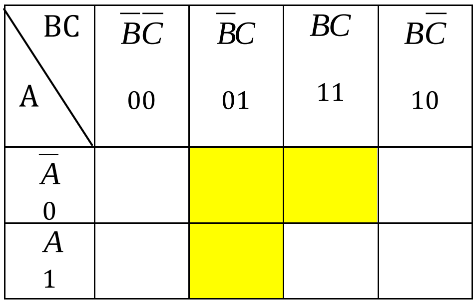
b)



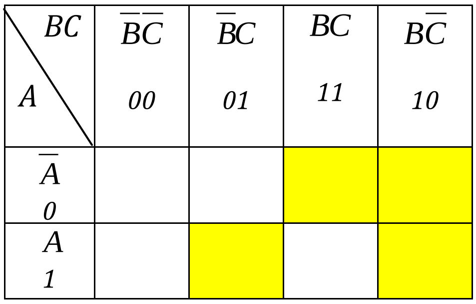
(c)



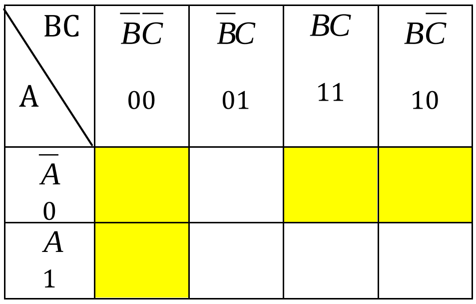
(d)



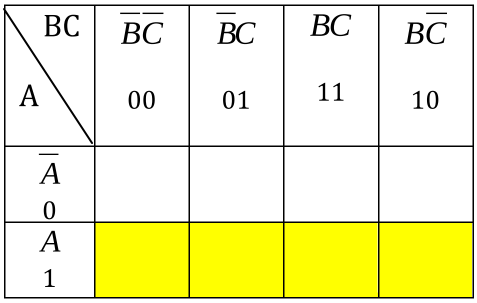
(e)



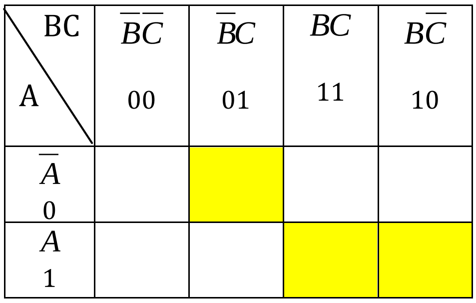
(f)


BC
A
$\overline{B}\overline{C}$ 00
$\overline{B}C$ 01
BC 11
$B\overline{C}$ 10
$\overline{A}$ 0
A 1

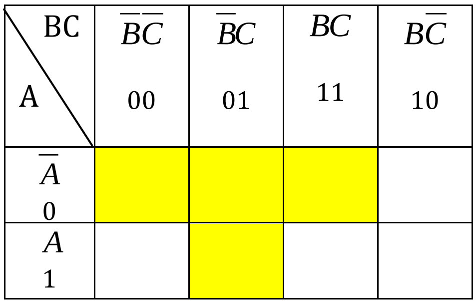
(g)


BC
A
$\overline{B}\overline{C}$ 00
$\overline{B}C$ 01
BC 11
$B\overline{C}$ 10
$\overline{A}$ 0
A 1

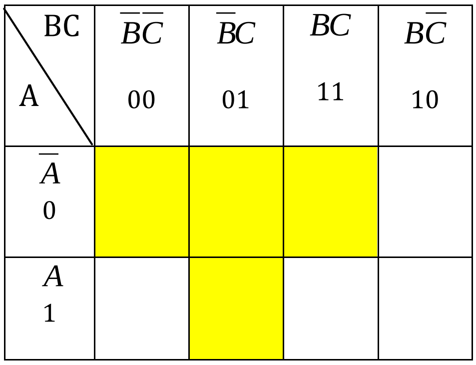
(h)


BC
A
$\overline{B}\overline{C}$ 00
$\overline{B}C$ 01
BC 11
$B\overline{C}$ 10
$\overline{A}$ 0
A 1

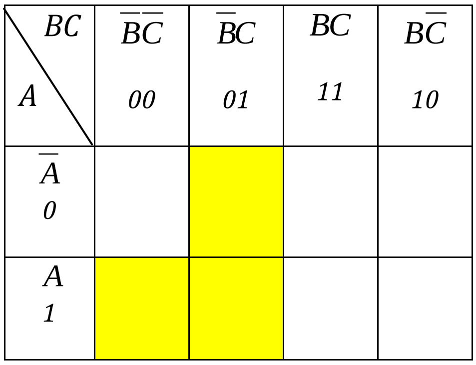
(i)


BC
A
$\overline{B}\overline{C}$ 00
$\overline{B}C$ 01
BC 11
$B\overline{C}$ 10
$\overline{A}$ 0
A 1

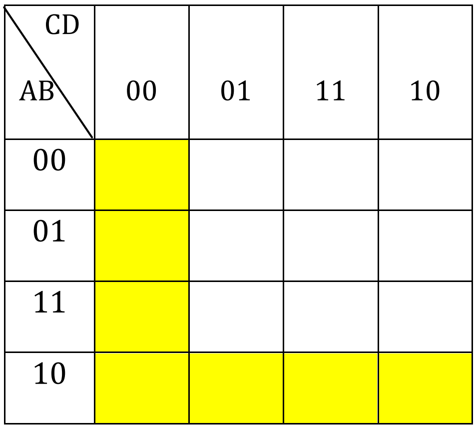
(j)


BC
A
$\overline{B}\overline{C}$ 00
$\overline{B}C$ 01
BC 11
$B\overline{C}$ 10
$\overline{A}$ 0
A 1

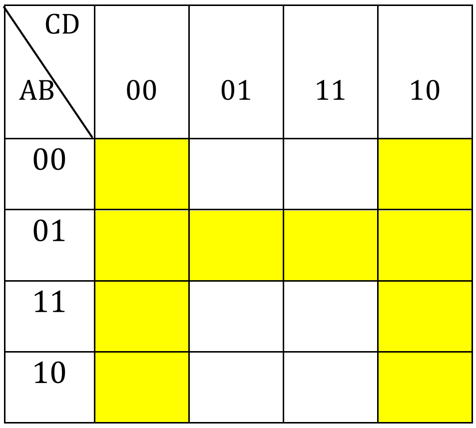
(k)


BC
A
$\overline{B}\overline{C}$ 00
$\overline{B}C$ 01
BC 11
$B\overline{C}$ 10
$\overline{A}$ 0
A 1

(l)


CD
AB
00
01
11
10
00
01
11
10

(ll)


CD
AB
00
01
11
10
00
01
11
10

(m)

Facetas

EL CIRCUITO ELÉCTRICO

Según Grayson – Smith (1967) Los conceptos cambiantes de la CIENCIA, menciona que:

El circuito eléctrico es el recorrido de la energía que es transportada por alambres especialmente de cobre por ser los mejores conductores de electricidad. Se utiliza para hacer trabajos en otros lugares.

Las fuentes de energía más comunes son la *pila voltaica y la batería de almacenamiento*, mantienen el flujo de la corriente a expensas de la energía química de las reacciones que ocurren dentro de la pila.

En el generador mecánico o dínamo, la corriente se mantiene fluyendo a merced a una bobina que gira entre los polos de un imán. La fuente de energía es el trabajo mecánico, proporcionada por una caída de agua, una máquina de vapor u otro tipo de motor.

La corriente eléctrica realiza un trabajo en el otro lado del circuito en muchas formas tales como:

La producción de calor o luz, en un calentador, en una lámpara incandescente, y en un tubo de gas como el que utiliza en el alumbrado público y en los tubos fluorescentes de muchos domicilios.

Trabajo mecánico, en motores eléctricos.

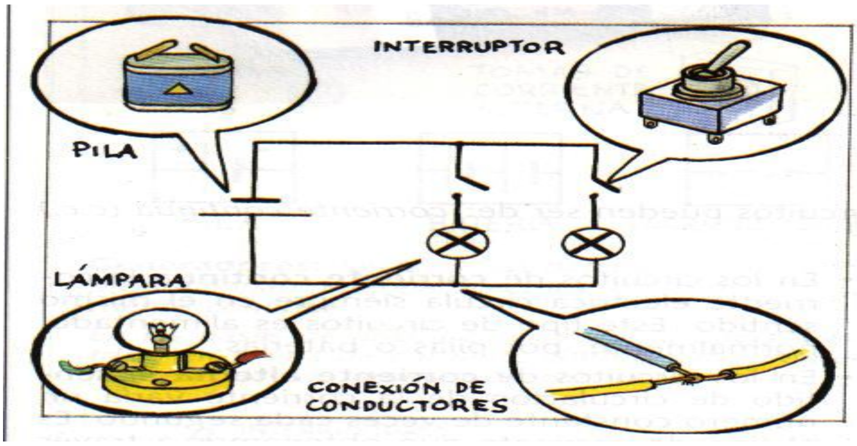
Electrolisis, en la cual la corriente efectúa trabajo al descomponer diversos compuestos químicos en reacciones que absorben energía, lo opuesto a la reacción productora de energía de la pila voltaica. (p.250)

La ley fundamental de los circuitos es la **ley de Ohm: R = V/I**, donde **R** es la resistencia de circuito, **V** la diferencia de potencial en volts e **I** es la corriente en ampers. De la misma ley se deriva otras fórmulas muy necesarias para el estudio de los circuitos eléctricos, entre estas se tiene:

$$I = \frac{V}{R}$$

$$V = IR$$

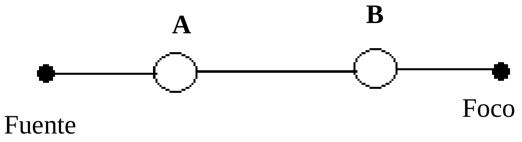
Existen dos formas de circuitos eléctricos, cuyas resistencias están conectadas **en serie, en paralelo o combinadas entre ambas.**



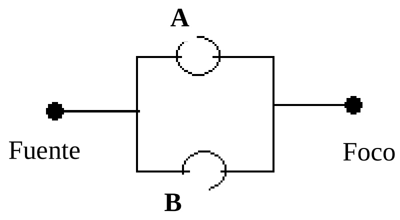
2.8 CIRCUITOS Y COMPUERTAS LÓGICOS

2.8.1 CIRCUITOS LÓGICOS

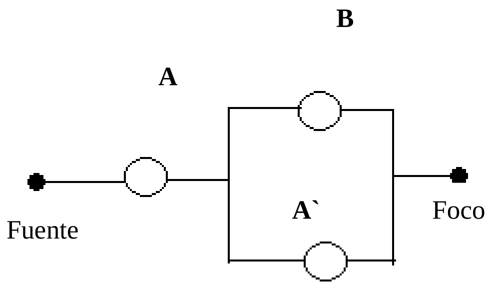
De la lectura **CIRCUITOS ELÉCTRICOS**, se puede identificar las dos formas de circuitos: en serie, en paralelo o combinados entre sí, en la misma manera forma se encuentran los circuitos lógicos, para tener claridad obsérvese las ilustraciones siguientes:



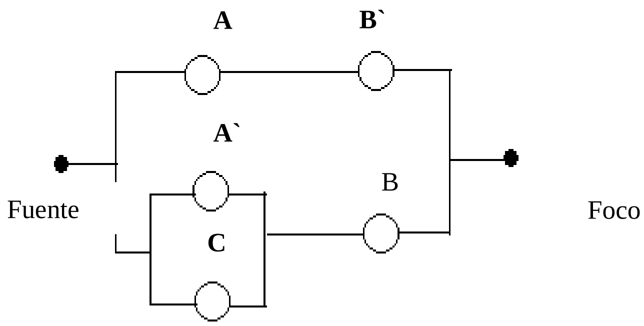
(1)



(2)



(3)



(4)

Sean A y B interruptores abiertos, A y A` interruptores tales que el primero está activado y el segundo desactivado. Los interruptores A y B se pueden conectar con un alambre, logrando obtener circuitos en serie o en paralelo como demuestran los gráficos 1 y 2.

El circuito 1, representa la conjunción $A \wedge B$; el circuito 2, representa la disyunción $A \vee B$, que son tratados en tablas de verdad con dos proposiciones A y B o estudiados en mapas de Karnaugh.

Un circuito conmutador booleano es un dispositivo de alambres e interruptores que forman mediante la combinación de los circuitos en serie y en paralelo cuyos conectores son $\wedge$ y $\vee$. También se interpreta por el signo de la multiplicación y la suma en algún momento.

Los diagramas 3 y 4, representan una composición mixta de circuitos en serie y en paralelo.

El circuito 3 se escribe $A \wedge (B \vee \neg A)$, en otros términos $A(B + \overline{A})$.

El circuito 4 se escribe $(A \wedge \neg B) \vee [(\neg A \vee C) \wedge B]$, y de otra forma $A\overline{B} + (\overline{A} + C)B$

Si se elabora en diagramas o mapas de Karnaugh para los circuitos 3 y 4 los resultados son los siguientes:

A \ B	0	1
0		
1		

Para el circuito 4, desarrollando paso a paso la solución es:

BC / A	$B`C`$	$B`C$	BC	$BC`$
$A`$				
A				

$A\overline{B}$

BC / A	$B`C`$	$B`C$	BC	$BC`$
$A`$				
A				

$(\neg A + C)$

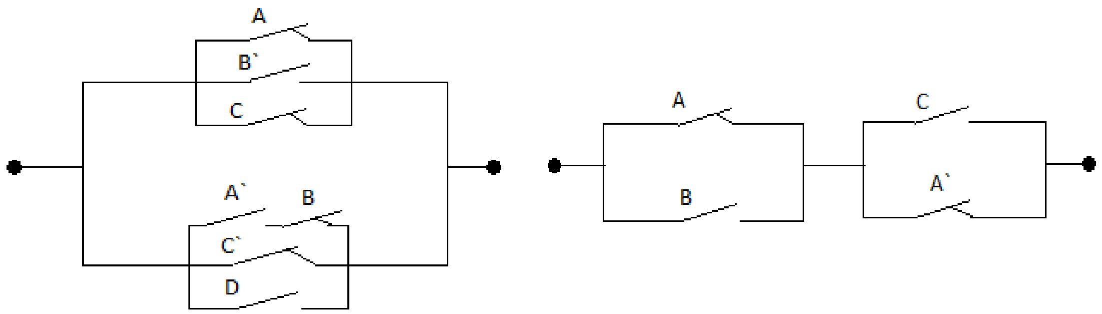
BC / A	$B`C`$	$B`C$	BC	$BC`$
$A`$				
A				

$(\neg A+C)B$

BC / A	$B`C`$	$B`C$	BC	$BC`$
$A`$				
A				

$A\overline{B}+(\neg A+C)B$

Ejemplo 2.21: Estudiar los circuitos siguientes:



(5) (6)

En el circuito 5 los interruptores A, B, C y C`, están conectados, mientras que A`, B` y, D está desconectados, el polinomio booleano resultante es:

$$y=(A+\overline{B}+C)+(\overline{A}B+\overline{C}+D)$$

Por la forma en que se encuentran los interruptores el circuito está activado por A, C y C`.

En el circuito 6 A y A` están conectados o cerrados, mientras que B y C están desconectados o abiertos; el polinomio resultante es:

$$y=(A+B)(C+\overline{A}).$$

El circuito está activado por los interruptores A y A`.

2.8.2 COMPUERTAS LÒGICAS

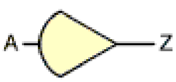
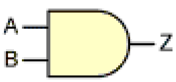
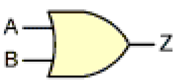
Los circuitos lógicos, forman la estructura de cualquier dispositivo para seleccionar o combinar señales de manera controlada. Entre los campos de aplicación de estos tipos de circuitos pueden encontrarse en la conmutación telefónica, transmisiones por satélite y en el funcionamiento de las computadoras digitales.

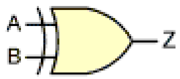
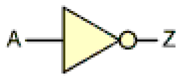
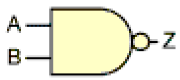
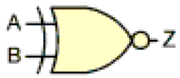
Las unidades elementales de un dispositivo lógico se llaman puertas lógicas digitales. Una puerta ***y*** (AND) tiene dos o más entradas y una única salida.

El resultado o salida de una puerta ***y*** es verdadera sólo si todas las entradas son verdaderas. Una puerta O (OR) tiene dos o más entradas y una sola salida.

El resultado o salida de una puerta ***o*** (OR) es verdadera si cualquiera de las entradas es verdadera, y los resultados es falso si todas las entradas son falsas. Una puerta ***inversora*** (INVERTER) tiene una sola entrada y una sola salida, y puede convertir una señal verdadera en falsa, constituyendo función negación (NOT).

Con puertas elementales pueden construirse complicados circuitos lógicos, entre ellos los circuitos biestables llamados flip-flops, que son interruptores binarios, contadores, comparadores, sumadores y combinaciones más complejas. La simbología que se va a emplear es:

CONECTOR/COMPUERTA, ENTRADA(S), SALIDA CONNECTOR/GATE, INPUT(S), OUTPUT	**NOMBRE** NAME	**TABLA DE VERDAD** TRUTH TABLE
	**AMORTIGUADOR** BUFFER	**A | Z** 0 | 0 1 | 1
	**Y** AND	**A | B | Z** 0 | 0 | 0 1 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 1 | 1
	**O (O, en sentido inclusivo)** OR	**A | B | Z** 0 | 0 | 0 1 | 0 | 1

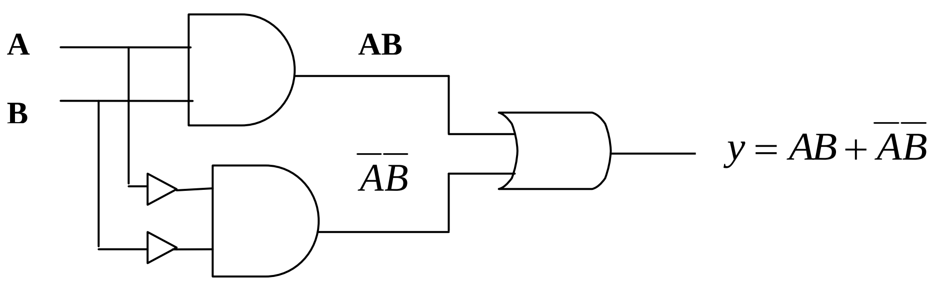
		0 | 1 | 1 1 | 1 | 1
	**OE (O, en sentido exclusivo)** XOR (EXCLUSIVE-OR)	A | B | Z 0 | 0 | 0 1 | 0 | 1 0 | 1 | 1 1 | 1 | 0
	**N, NEG o INVERSOR** NOT or INVERTER	A | Z 0 | 1 1 | 0
	**NY (N Y)** NAND (NOT AND)	A | B | Z 0 | 0 | 1 1 | 0 | 1 0 | 1 | 1 1 | 1 | 0
	NO (N O) NOR (NOT OR)	A | B | Z 0 | 0 | 1 1 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 1 | 0
	**NOE (N OE)** NXOR (NOT EXCLUSIVE-OR)	A | B | Z 0 | 0 | 1 1 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 1 | 1

Fuente: Dr. J.J Luetich. 10 de mayo 2003

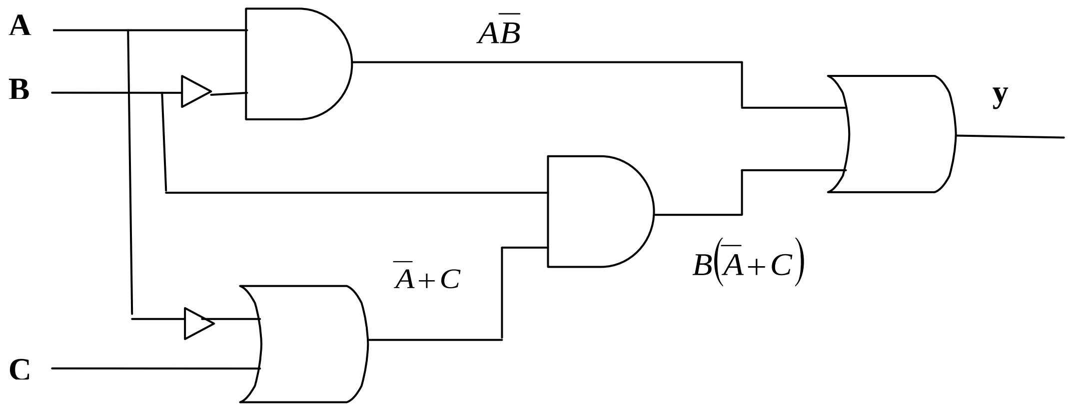
Cuadro 2.8

Ejemplo 2.22: Representar el polinomio $y = AB + \overline{A}\overline{B}$ mediante compuertas lógicas

Solución:



Ejemplo 2.23: Representar el polinomio booleano $y = A\overline{B} + \left[B\left(\overline{A} + C\right)\right]$



GUÍA DE ESTUDIO 12

Objetivos

- Construir circuitos lógicos conociendo polinomios booleanos y verificación mediante tablas de verdad.
- Simplificar polinomios booleanos mediante mapas de Karnaugh.
- Identificar la simbología de las puertas lógicas.

Actividades

Durante el tiempo para el trabajo autónomo, resuelva los ejercicios siguientes:

1. En cada uno de los polinomios booleanos aplique el mapa de Karnaugh

   a. $y = AC\left(B + \overline{A}\right)$

   b. $y = A\left(\overline{B} + C\right) + B\overline{C}$

   c. $y = \left[(A + B)C + \overline{A}\right]B$

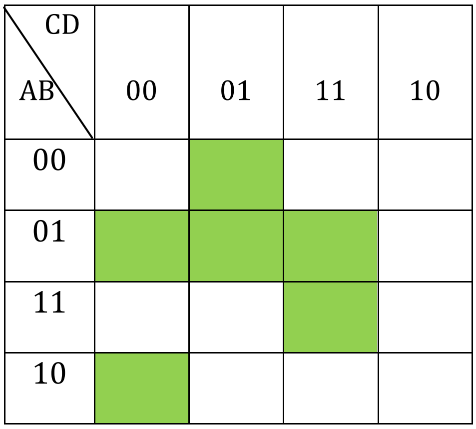
   d. $y = AB\left(\overline{B} + C\right) + C\left(\overline{A} + \overline{B}\right)$

   e. $y = (AB + C) + A(A + B) + B(B + C)$

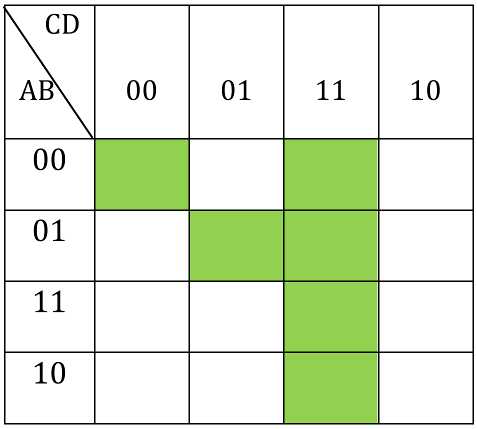
   f. $y = \left(\overline{AC + B}\right)(AC + AB)$

   g. $y = A\left(B\overline{C} + D\right) + B\left(\overline{\overline{CD}} + A\right)$

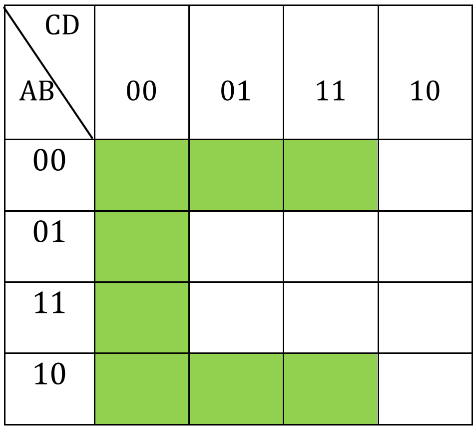
2. En los diagramas que están a continuación, estúdielos y escriba el polinomio booleano correspondiente. Las celdas coloreadas son las que tienen valor de verdad.


CD
AB
00
01
11
10
00
01
11
10

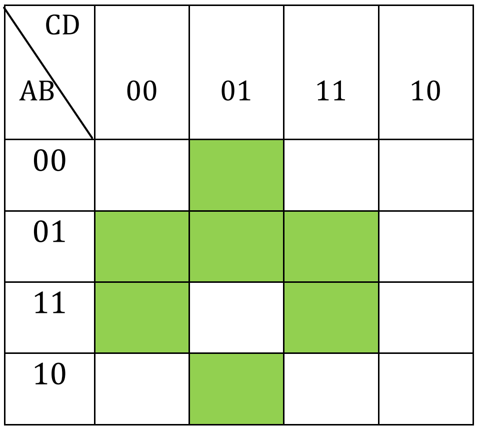
(a)


CD
AB
00
01
11
10
00
01
11
10

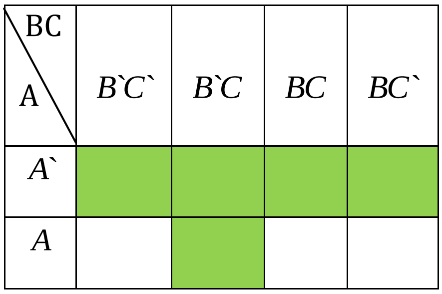
(b)


CD
AB
00
01
11
10
00
01
11
10

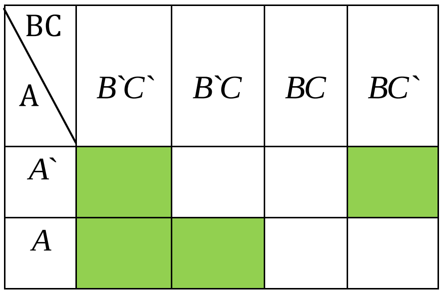
©


CD
AB
00
01
11
10
00
01
11
10

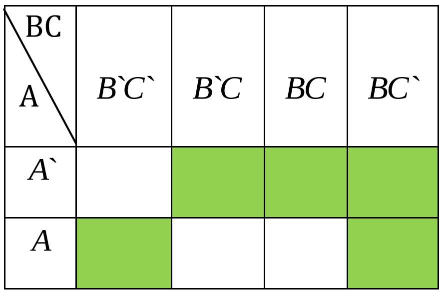
(d)


BC
A
B`C`
B`C
BC
BC`
A`
A

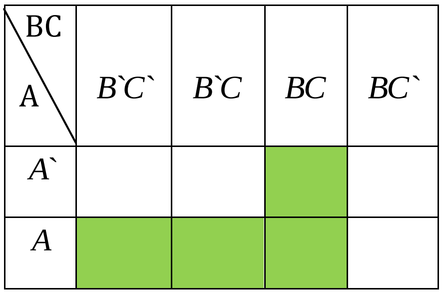
(e)


BC
A
B`C`
B`C
BC
BC`
A`
A

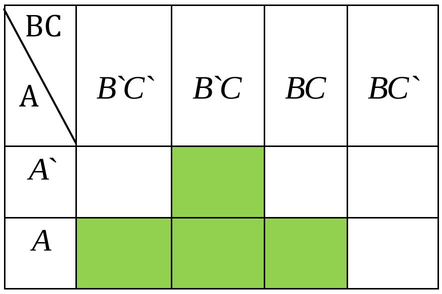
(f)


BC
A
B`C`
B`C
BC
BC`
A`
A

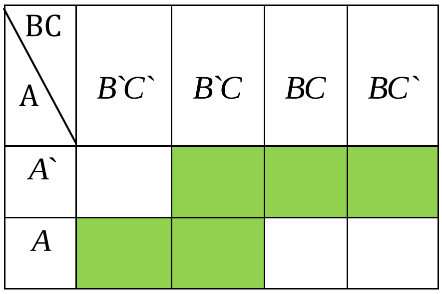
(g)


BC
A
B`C`
B`C
BC
BC`
A`
A

(h)



(i)



(j)

3. De los diagramas del ejercicio anterior, los polinomios booleanos identificados, represente en circuitos y compuertas lógicas. Recuerde que las celdas coloreadas tienen valor de verdad y habilitan la activación del circuito.

4. Con un compañero/a de aula, construya dos polinomios booleanos de tres y cuatro variables y elabore tablas de verdad, mapas de Karnaugh, circuitos y compuertas lógicas. Verifique los resultados y escriba las conclusiones.

5. De su propia inversión escriba una operación combinada con cuatro conjuntos, resuelva gráficamente y transforme en un polinomio booleano. Compare resultados conclusiones.

Curiosidades

Lea y comente con su compañera/o, sobre:

ORDENADORES, NUEVAS ARMAS TOPOGRÁFICAS

La compañía SPOT Image Corporation con sede en Virginia, no tiene problema en reconocer que los archivos de la Academia Rusa de Ciencias y de la propia KGB le han permitido desarrollar una técnica de imágenes pancromáticas de gran resolución.

"Es un mercado puntero, copado de tres o cuatro empresas en todo el mundo, en el que la tecnología digital por satélite permite lograr la más perfecta cartografía con un error mínimo", ha señalado a *Efe* Gary Kuchel, gerente de ventas para Estados Unidos de SPOT Image.

Las nuevas armas de esta industria floreciente son los ordenadores, capaces de sintetizar la información del Sistema de Posicionamiento Global; GPS, las imágenes en falso color de los satélites - que ya no espían, sino que observan- y las cartografías más precisas.

El resultado es un mapa en relieve, interactivo, rico en datos, que va apareciendo en las extraplanas pantallas de un PC multimedia.

La exhibición del poderío mundial cibernético, en el mismo corazón del Departamento de Estado y a escasos 400 metros de la Casa Blanca en Washington, han dado lugar a escenas peculiares.

De esta manera los SATÉLITES ESPÍAS SE CONVIERTEN EN TOPÓGRAFOS DE PAZ.

"Como buenos amigos, expertos y especialistas de los departamentos de Estado y de Defensa estadounidenses compartieron información con los responsables de la más avanzada empresa rusa de datos recabados mediante satélites".

2.9 ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES Y DE CONJUNTOS

Para entrar al estudio algebraico es necesario revisar las propiedades de las proposiciones con el fin de familiarizar con las expresiones que puedan darse más adelante en las simplificaciones de polinomios.

2.9.1 RELACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE PROPOSICIÓN Y CONJUNTOS

PROPOSICIONES	CONJUNTOS
$p \wedge p \equiv p$	$A \cap A = A$
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$A \cap B = B \cap A$
$p \vee p \equiv p$	$A \cup A = A$
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$p \vee q \equiv q \vee p$	$A \cup B = B \cup A$
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$p \wedge V \equiv p$	$A \cap \mathrm{Re} = A$
$p \wedge F \equiv F$	$A \cap \phi = \phi$
$p \vee F \equiv p$	$A \cup \phi = A$
$p \vee V \equiv V$	$A \cup \mathrm{Re} = \mathrm{Re}$
$p \wedge \neg p \equiv F$	$A \cap A^c = \phi$
$\neg V \equiv F$	$\mathrm{Re}^c = \phi$
$\neg\neg p \equiv p$	$(A^c)^c = A$
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	$A \cap (A \cup B) = A$
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$A \cup (A \cap B) = A$

Cuadro 2.9

Ejemplo 2.24: Dado el polinomio $y = [(P \wedge \neg Q) \vee P] \vee [(Q \wedge \neg P) \vee Q]$:

a. Simplificar algebraicamente.

b. Buscar otra alternativa de solución.

c. Resolver mediante diagramas o mapas de Karnaugh.

d. Resolver mediante tablas.

Solución:

a. $y=[P\vee(P\wedge\neg Q)]\vee[Q\vee(Q\wedge\neg P)]$ Propiedad conmutativa

$y=P\vee Q$ Por la propiedad de absorción

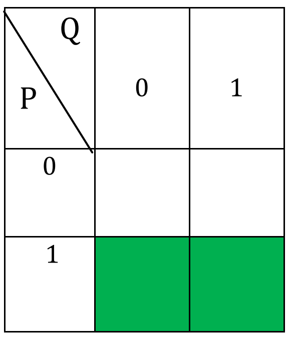
b. Aplicando otro procedimiento:

$$y=\left(P+P\overline{Q}\right)+\left(Q+Q\overline{P}\right)$$

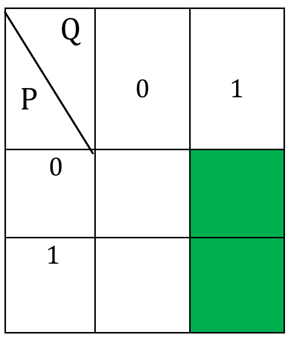
$$y=P\left(1+\overline{Q}\right)+Q\left(1+\overline{P}\right);\ 1+\overline{Q}=V;\quad 1+\overline{P}=V$$

$$y=P+Q$$

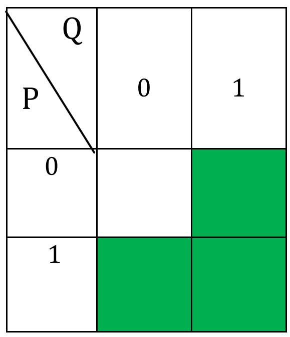
c. Mediante la aplicación de diagramas de Karnaugh.



$P+P\overline{Q}$



$Q+Q\overline{P}$



$y=\left(P+P\overline{Q}\right)+\left(Q+Q\overline{P}\right)$

d. Tabla de verdad.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P\overline{Q}$	$Q\overline{P}$	$P+P\overline{Q}$	$Q+Q\overline{P}$	$y=\left(P+P\overline{Q}\right)+\left(Q+Q\overline{P}\right)$
V	V	F	F	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F	F	F

Ejemplo 2.25:

Simplificar el polinomio $y=\left\lfloor A\overline{B}\left(\overline{\overline{B}+C}\right)\right\rfloor+\left(A\overline{C}\right)\left(AB\right)$

Solución:

$y=A\overline{B}\overline{\overline{B}}\overline{C}+AB\overline{C}$, aplicando la ley De Morgan y asociativa.

$y=AB\overline{B}\overline{C}+AB\overline{C}$, propiedad asociativa

$y=\left(A\overline{C}\right)F+AB\overline{C}$, ley de complemento,

$y=F+AB\overline{C}$, por la ley de identidad,

$y=AB\overline{C}$

Ejemplo 2.26: Dado el polinomio booleano

$$y=\left[\left(\neg A\vee\neg B\right)\wedge\left(B\wedge C\right)\right]\vee\left[\neg A\vee\neg\left(B\wedge\neg C\right)\right]$$

a. Simplificar algebraicamente.

b. Elaborar una tabla de verdad

c. Resolver gráficamente por medio de diagramas de Karnaugh.

d. Transformar en una operación de conjuntos.

e. Resolver gráficamente la operación de conjuntos.

Solución:

a. $y=[(\neg A\vee\neg B)\wedge(B\wedge C)]\vee[\neg A\vee\neg(B\wedge\neg C)]$, propiedad conmutativa, de complemento.

$y=[(B\wedge C)\wedge(\neg A\vee\neg B)]\vee[\neg A\vee(\neg B\vee\neg\neg C)]$, distributiva, asociativa

$y=[(B\wedge C\wedge\neg A)\vee(B\wedge C\wedge\neg B)]\vee[\neg A\vee(\neg B\vee C)]$, de complemento

$y=[(B\wedge C\wedge\neg A)\vee F]\vee[\neg A\vee\neg B\vee C]$, de identidad

$y=(B\wedge C\wedge\neg A)\vee(\neg A\vee\neg B\vee C)$,

$y=(\neg A\vee\neg B\vee C\vee B)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee C\vee C)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee C\vee\neg A)$, ley distributiva

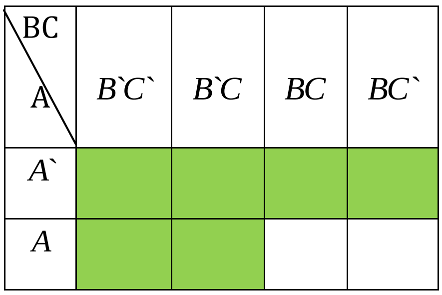
$y=V\wedge(\neg A\vee\neg B\vee C)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee C)$, identidad, idempotencia

$y=\neg A\vee\neg B\vee C$

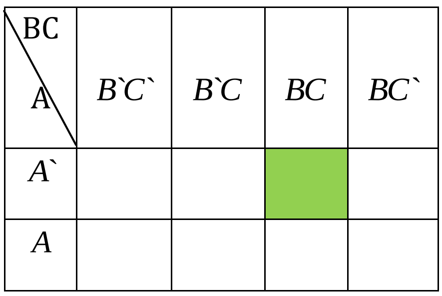
b. Tabla de verdad

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{A}+\overline{B}$	BC	$BC(\overline{A}+\overline{B})$	$B\overline{C}$	$\overline{B\overline{C}}$	$\overline{A}+(\overline{B\overline{C}})$	y
V	V	V	F	F	F	F	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V	F	F	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	V

c. Diagramas de Karnaugh



$\overline{A}+\overline{B}$



$BC(\overline{A}+\overline{B})$

BC \ A	$B'C'$	$B'C$	BC	BC'
A'				
A				

$B\overline{C}$

BC \ A	$B'C'$	$B'C$	BC	BC'
A'				
A				

$\overline{B\overline{C}}$

BC \ A	$B'C'$	$B'C$	BC	BC'
A'				
A				

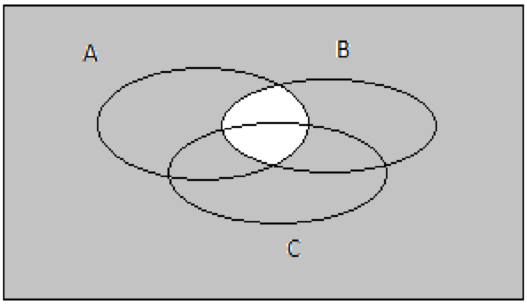
$\overline{A}+\overline{B\overline{C}}$

BC \ A	$B'C'$	$B'C$	BC	BC'
A'				
A				

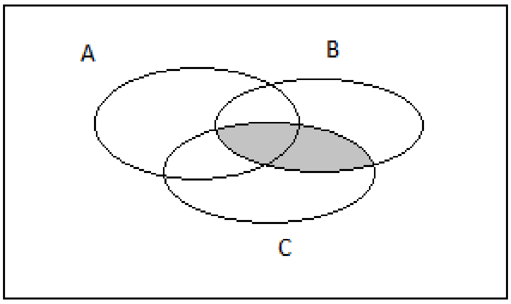
$y=\neg A+\neg B+C$

d. Operación de conjuntos: $\left[\left(A^c \cup B^c\right) \cap (B \cap C)\right] \cup \left[A^c \cup \left(B \cap C^c\right)^c\right]$

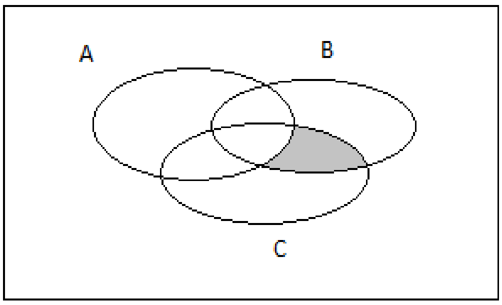
e. Resolución gráfica de conjuntos



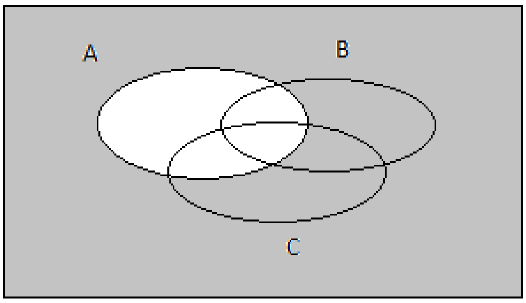
$A^c \cup B^c$



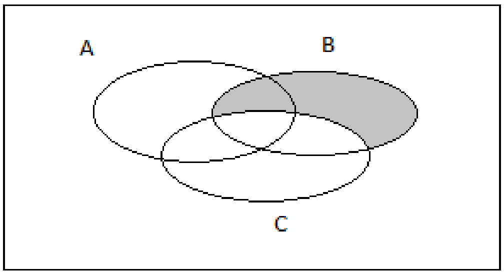
$B \cap C$



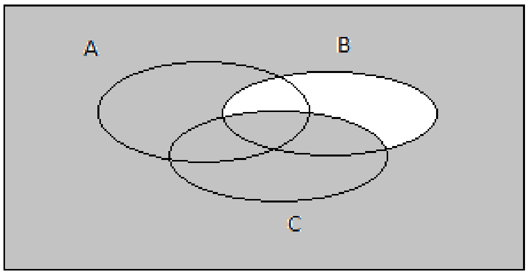
$\left(A^c \cup B^c\right) \cap (B \cap C)$



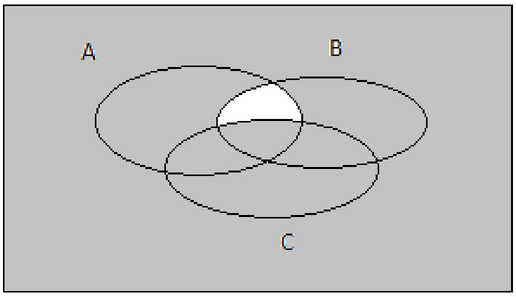
A^c



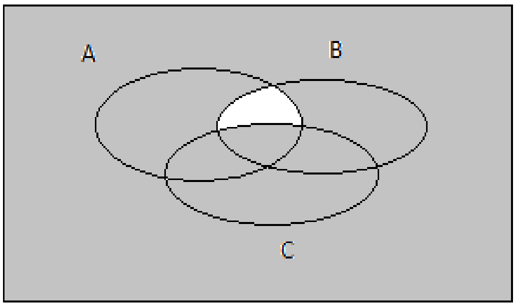
$B \cap C^c$



$(B \cap C^c)^c$



$A^c \cup (B \cap C^c)^c$



$[(A^c \cup B^c) \cap (B \cap C)] \cup [A^c \cup (B \cap C^c)^c]$

Ejemplo 2.27: Dado el polinomio booleano

$$y = [(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg C)] \wedge [\neg A \vee (B \wedge \neg C)].$$

Encontrar:

a. La expresión simplificada algebraicamente.

b. El circuito lógico del polinomio inicial.

c. El circuito lógico de la expresión resultante.

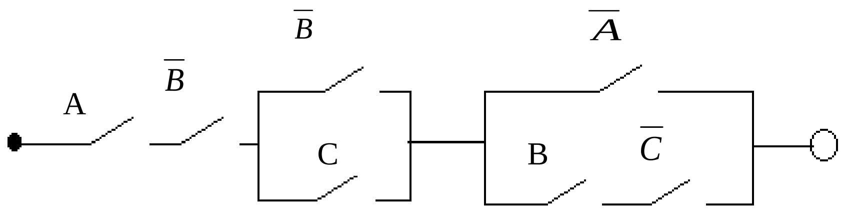
d. Análisis de los resultados de los literales a, b y c.

Solución:

a. $y=[(A\wedge\neg B)\wedge\neg(B\wedge\neg C)]\wedge[\neg A\vee(B\wedge\neg C)]$, escribiendo con otros signos el polinomio es:

$$
\begin{aligned}
y &= \left[A\bar{B}\,\overline{B\bar{C}}\right]\left(\bar{A}+B\bar{C}\right) \text{, aplicando la ley De Morgan,}\\
y &= \left[A\bar{B}\left(\bar{B}+C\right)\right]\left(\bar{A}+B\bar{C}\right) \text{, usando la propiedad distributiva,}\\
y &= \left(A\bar{B}\bar{B}+A\bar{B}C\right)\left(\bar{A}+B\bar{C}\right) \text{, aplicando la propiedad de idempotencia,}\\
y &= \left(A\bar{B}+A\bar{B}C\right)\left(\bar{A}+B\bar{C}\right) \text{, por la propiedad distributiva,}\\
y &= A\bar{B}\bar{A}+A\bar{B}B\bar{C}+A\bar{B}C\bar{A}+A\bar{B}CB\bar{C} \text{ por la ley de complemento}\\
y &= F+F+F+F\\
y &= F
\end{aligned}
$$

b. El circuito lógico es:



c. El resultado del polinomio simplificado es una falsedad, esto es el circuito no se activa con ninguna alternativa.

Mediante observación en el circuito lógico, no se activa bajo ninguna circunstancia, esto quiere decir que al cerrar un interruptor A, automáticamente el interruptor $\bar{A}$; lo mismo ocurre con los interruptores B y C. Al realizar una tabla de valores con tres variables, el valor de verdad de las 8 alternativas será falso.

Ejemplo 2.28: Utilizando las leyes del álgebra de proposiciones y los diagramas de Karnaugh como medio de verificación, simplificar la expresión siguiente:

$$y=[\neg(A\Rightarrow B)\wedge(B\wedge C)]\Rightarrow[(A\wedge B)\wedge\neg(B\vee C)]$$

Solución:

$y = [\neg(\neg A \vee B) \wedge (B \wedge C)] \Rightarrow [(A \wedge B) \wedge (\neg B \wedge \neg C)]$, equivalencia, ley De Morgan

$y = \neg(A \wedge \neg B \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg B \wedge \neg C)$, De Morgan, asociativa

$y = \neg F \vee F$, de complemento

$y = V \vee F$, de identidad

$y = V$ (Tautología)

Para verificar con los mapas o diagramas de Karnaugh, la expresión inicial debe escribirse en función de la conjunción y la disyunción, para esto se apoya en el primer paso de la solución, adicionando la propiedad de equivalencia, la expresión se convierte:

$$y = \neg[\neg(\neg A \vee B) \wedge (B \wedge C)] \vee [(A \wedge B) \wedge (\neg B \wedge \neg C)]$$

Escribiendo con signos convencionales, se tiene:

$$y = \overline{\overline{(\overline{A} + B)}BC} + (AB)(\overline{B}\,\overline{C})$$

BC \ A	B\`C\`	B\`C	BC	BC\`
A\`				
A				

$\overline{A} + B$

BC \ A	B\`C\`	B\`C	BC	BC\`
A\`				
A				

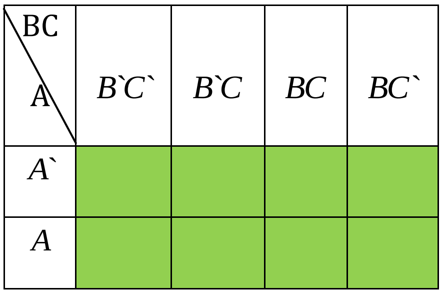
$\overline{(\overline{A} + B)}$

BC \ A	B\`C\`	B\`C	BC	BC\`
A\`				
A				

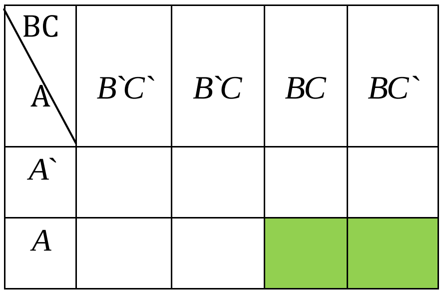
BC

BC \ A	B\`C\`	B\`C	BC	BC\`
A\`				
A				

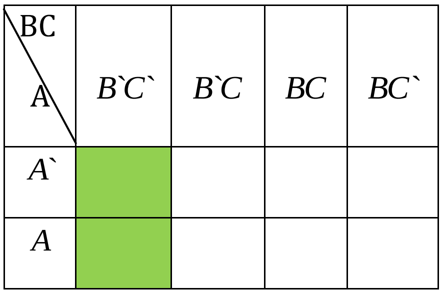
$\overline{(\overline{A} + B)}BC$



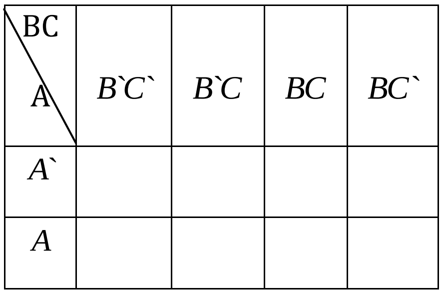
$\overline{\overline{(\overline{A}+B)}BC}$



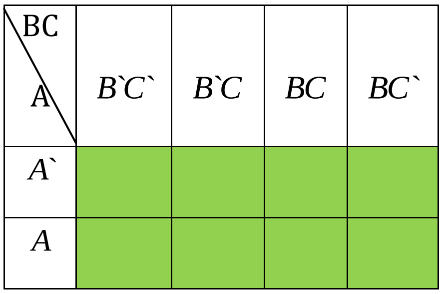
AB



$\overline{B}\,\overline{C}$



$(AB)(\overline{B}\,\overline{C})$



$y = \overline{\overline{(\overline{A}+B)}BC} + (AB)(\overline{B}\,\overline{C})$

Ejemplo 2.29: Dado el polinomio $y = [(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \vee C)] \Rightarrow (B \Rightarrow C)$:

a. Simplificar algebraicamente.

b. Resolver mediante diagramas de Karnaugh.

c. Superando las proposiciones condicionales y bicondicionales, elabore un circuito lógico y su correspondiente compuerta lógica.

Utilizando signos convencionales, se tiene:

Solución:

a.

$$y=\left[\left(\overline{\overline{A}+B}\right)\left(\overline{A+\overline{B}}\right)+(A+C)\right]\Rightarrow\left(\overline{B}+C\right)$$ ley de equivalencia

$$y=\left[\overline{\overline{\overline{A}+B}+\overline{A+\overline{B}}+(A+C)}\right]\Rightarrow\left(\overline{B}+C\right)$$, ley de equivalencia, De Morgan

$$y=\left(A\overline{B}+\overline{A}B+A+C\right)\Rightarrow\left(\overline{B}+C\right)$$, ley de equivalencia, De Morgan

$$y=\overline{A\overline{B}+\overline{A}B+A+C}+\overline{B}+C$$, De Morgan

$$y=(\overline{A\overline{B}})\left(\overline{\overline{A}B}\right)\left(\overline{A}\right)\left(\overline{C}\right)+\overline{B}+C$$, De Morgan

$$y=\left(\overline{A}+B\right)\left(A+\overline{B}\right)\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}+C$$, distributiva

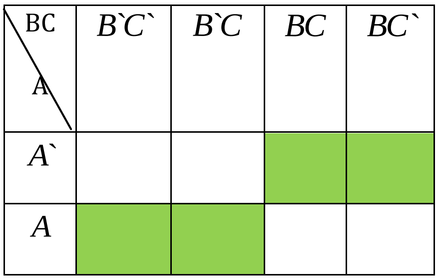
$$y=\left[\left(\overline{A}A+\overline{A}\,\overline{B}+AB+B\overline{B}\right)\overline{A}\,\overline{C}\right]+\overline{B}+C$$, de complemento

$$y=\left(F+\overline{A}\,\overline{B}+AB+F\right)\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}+C$$, distributiva, de complemento

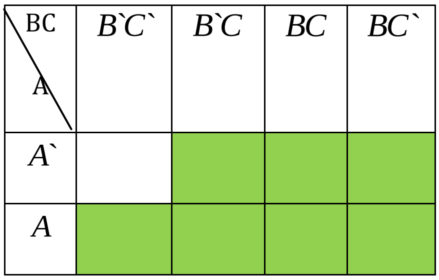
$$y=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{B}+C$$, de absorción

$$y=\overline{B}+C$$

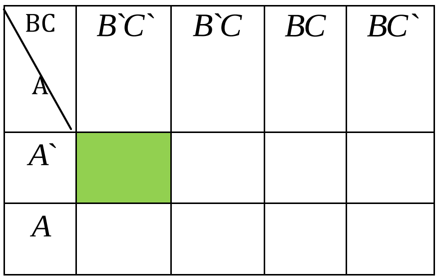
b. Diagramas de Karnaugh



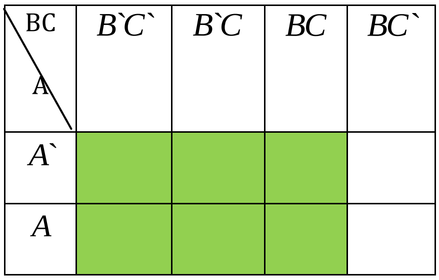
$A\overline{B}+\overline{A}B$



$A\overline{B}+\overline{A}B+A+C$



$\overline{A\overline{B}+\overline{A}B+A+C}$

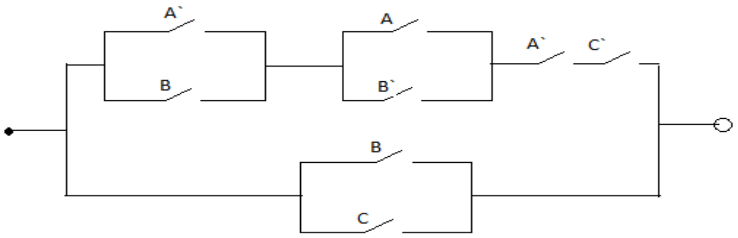


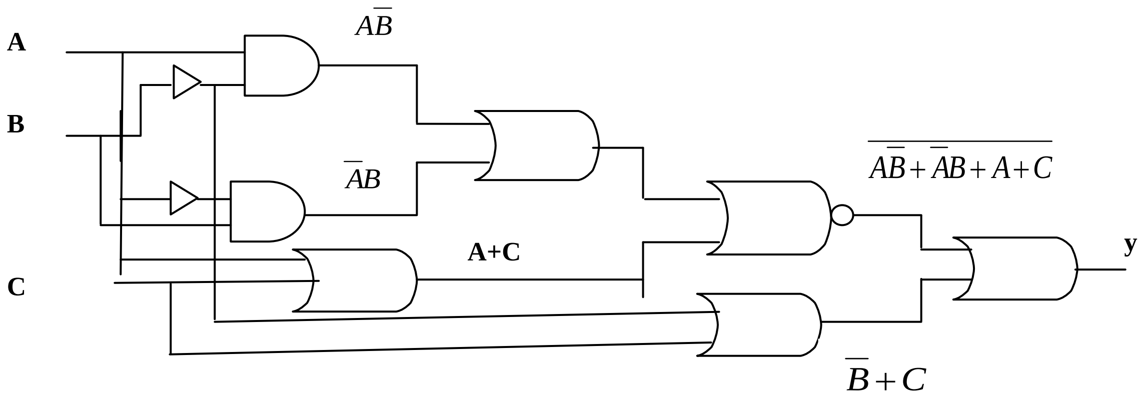
$\overline{B}+C$

BC \ A	$B`C`$	$B`C$	BC	$BC`$
$A`$				
A				

$$\overline{A\overline{B}+\overline{A}B+A+C}+\overline{B}+C$$

c. Circuito y compuerta lógicos





CONCLUSIÓN

El estudio de la teoría de conjuntos y de las proposiciones tiene una relación innata en las y gráficos, dan lugar a interrelaciones para lograr mejor conocimiento y adecuado adestramiento del campo lógico matemático, ayuda al análisis, reflexión y creación de expresiones matemáticas y algebraicas, para acumular destrezas en el área de la informática. Se sugiere a los estudiantes la invención de polinomios booleanos y aplicar en operaciones de conjuntos en forma gráfica y algebraica.

GUÍA DE ESTUDIO 13

Objetivo

Afianzar el conocimiento lógico en las operaciones de proposiciones y de conjuntos y su consecuente relación con circuitos y compuertas lógicas.

Actividades

Para resolver cada uno de los ejercicios, puede realizar en equipo de tres estudiantes en el tiempo de trabajo autónomo.

1. Simplificar los polinomios booleanos siguientes:

   a. $y = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}BC + AB\left(B + \overline{C}\right)$

   b. $y = \overline{AB}C + \overline{A}\,\overline{BC} + AB$

   c. $y = A\left(B + \overline{C}\right) + \overline{B}\left(BC + A\overline{B}\right)$

   d. $y = AB(A + C) + \overline{B}(AB + C)$

   e. $y = \overline{AB\overline{C} + \overline{AB}} + \left(\overline{B}C + \overline{A}B\right)$

2. Verificar los resultados de los polinomios a través de tablas de verdad.

3. En cada una de las expresiones: simplificar algebraicamente, resolver gráficamente con los mapas de Karnaugh, transformar en operaciones de conjuntos y resolver gráficamente en los diagramas de Veen.

   a. $(A \Rightarrow C) \Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge \neg(A \vee C)]$

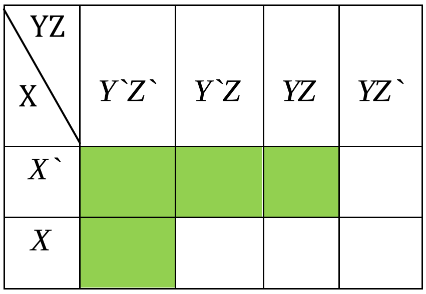
   b. $[(A \wedge B) \wedge \neg(A \vee C)] \Rightarrow [A \wedge (A \Rightarrow B)]$

   c. $[A \Rightarrow (B \wedge C)] \Rightarrow [(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee C)]$

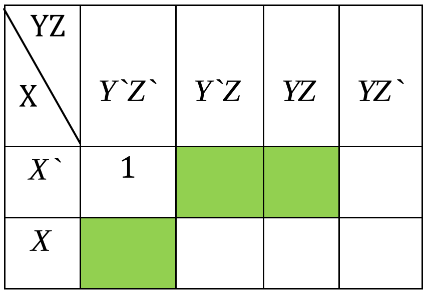
   d. $[(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow CD] \wedge [(C \Rightarrow D) \Leftrightarrow \neg B]$

4. Escriba un polinomio booleano y utilizando la simbología más adecuada simplifique algebraicamente, construya un circuito y compuerta lógicos, verifique con tablas de verdad y resuelva mediante mapas de Karnaugh.

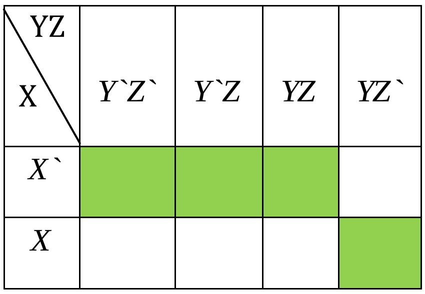
5. Las áreas sombreadas de cada uno de los diagramas representa los valores de verdad de un polinomio. Escriba el polinomio booleano en cada uno de los diagramas.



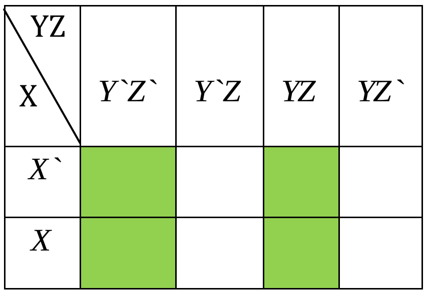
(a)



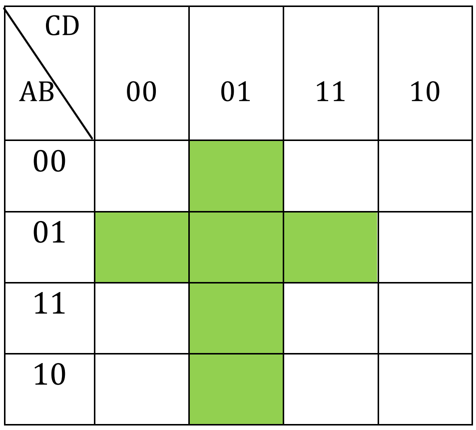
(b)



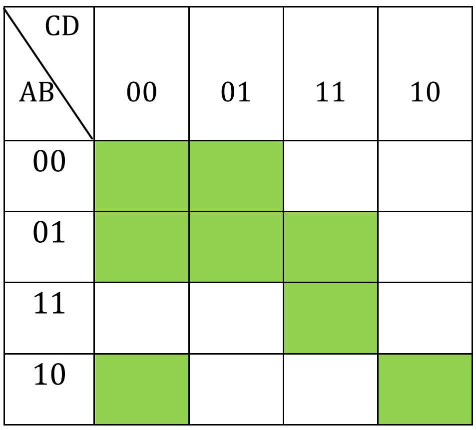
©



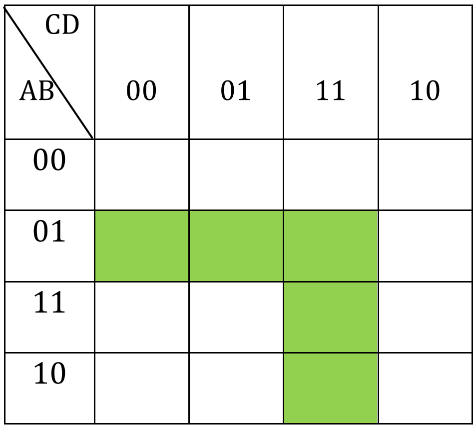
(d)



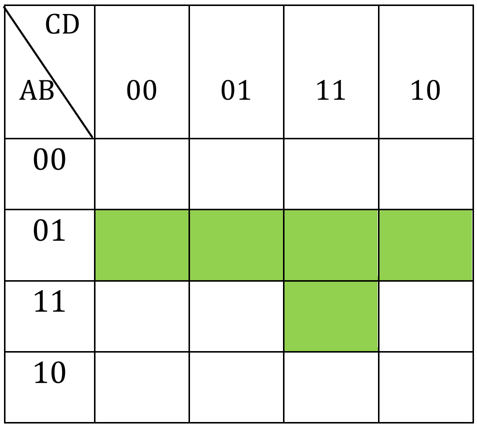
(e)



(f)



(g)



(h)

6. En cada una de las expresiones:

6.1 $\left[A\cup\left(B^{c}\cap C\right)\right]\cap\left[\left(B\cup A^{c}\right)\cap C\right]$

6.2 $\left[\left(A\cap B\right)^{c}\cap\left(B\cup C^{c}\right)^{c}\right]\cap\left[\left(B^{c}\cup C^{c}\right)\cap A^{C}\right]$

6.3 $\left[\left(A^{c}\cap B\right)^{c}\cap\left(A\cup C\right)\right]\cup\left[B\cap\left(B\cup C\right)\right]$

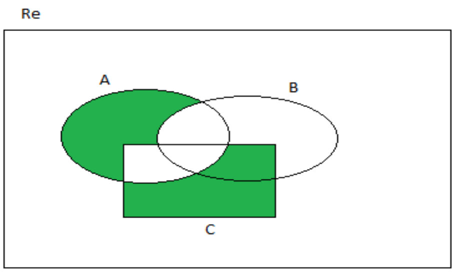
   a. Resuelva la operación de conjuntos en forma analítica y gráfica.

   b. Simplificar algebraicamente.

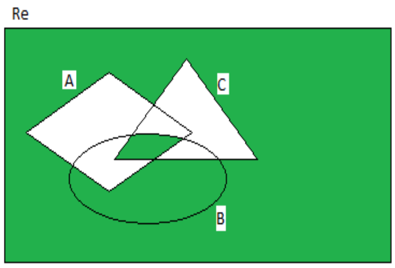
   c. Transformar en un polinomio booleano.

   d. Construir un circuito lógico y la compuerta respectiva.

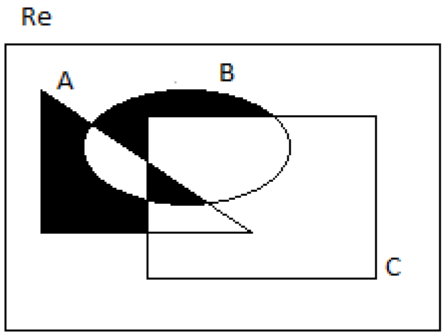
7. Identifique y escriba la operación de conjuntos en los diagramas de Veen, y luego trasforme a polinomios booleanos y construya circuitos y compuertas lógicas en las gráficas siguientes:



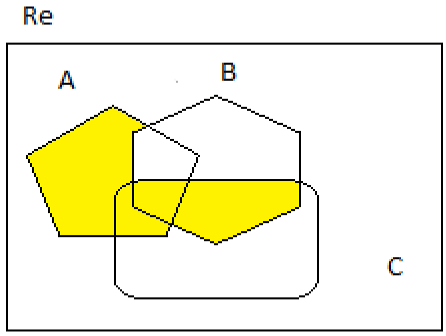
(a)



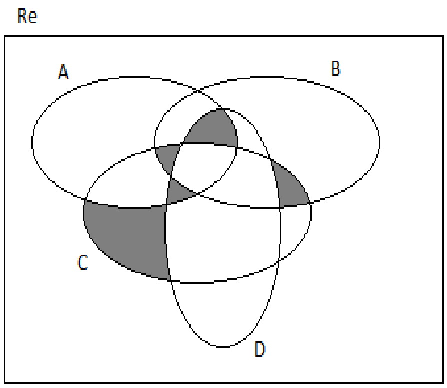
(b)



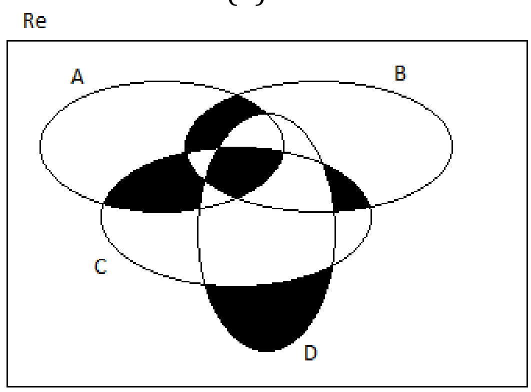
©



(d)



(e)



(f)

2.10 RELACIONES Y DÍGRAFOS

Para el estudio de este tema es fundamental recordar definiciones y teoremas de la teoría de conjuntos que se tiene a continuación:

2.10.1 Relaciones binarias

Las relaciones binarias son un conjunto de parejas ordenadas de objetos que tienen una característica común, es utilizada con frecuencia en computación.

Definición 2.10.1 Una relación es binaria cuando hay correspondencia entre los elementos de un conjunto A (conjunto de partida) con los elementos de un conjunto B (conjunto de llegada).

Par ordenado (a, b).- es la relación entre dos elementos, en donde **a** es la primera componente y **b** es la segunda componente, escritos entre paréntesis, separados por una coma.

Por definición $(a,b) \neq (b,a)$

Igualdad entre pares ordenados

Definición 2.10.2: $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$, si y solo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$

Cardinalidad

Definición 2.10.3: Es la cantidad de elementos de un conjunto A, se representa por el símbolo N(A).

Cardinalidad de conjuntos

A = { x/x es un dígito par en el sistema de numeración decimal}

N(A) = 4, porque A = {2, 4, 6, 8}

Teorema

Para dos conjuntos finitos no vacíos A y B, se cumple que $|AxB| = |A|.|B|$.

El cardinal del producto es igual al producto de los cardinales

Conjuntos relevantes

En un conjunto A, se pueden encontrar los casos siguientes:

- A es vacío si no tiene elementos, se representa por el símbolo ϕ, N(A) = 0
- A es unitario, N(A) = 1.
- A es finito, si tiene cantidad finita de elementos.
- A es infinito, si tiene cantidad infinita de elementos.
- A es referencial o universo, se representa por los símbolos Re o $\bigcup$.

Cuantificadores

El símbolo $\forall$, se lee: "para todo", "cada", "todo", "para cada".

El símbolo $\exists$, se lee: "existe", "algunos", "algún", "basta que uno", "por lo menos uno"

Subconjunto

Definición 2.10.4: $(A \subseteq B) \Leftrightarrow \forall x(x \in A) \rightarrow (x \in B)$

Conjunto potencia

Definición: $P(A) = \{B / B \subseteq A\}$, esto quiere decir que dado un conjunto A, su conjunto potencia está formado por todos los subconjuntos de A

Ejemplo 2.30:

Si A = {a, e, i}, entonces

P(A) = {ϕ, {a}, {e}, {i}, {a,e}, {a,i}, {e,i}, A}

Se observan 8 conjuntos que se obtiene por el respaldo de N(P(A)) = 2^3 = 8

Producto cartesiano

Definición 2.10.5: si A y B son conjuntos no vacíos, $AxB = \{(x, y)/(x \in A) \wedge (y \in B)\}$

Ejemplo 2.31: Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{m, n\}$. Encuentre A x B y B x A

Solución:

En forma tabular

A/B	m	n
1	(1,m)	(1,n)
2	(2,m)	(2,n)
3	(3,m)	(3,n)

A/B	1	2	3
m	(m,1)	(m,2)	(m,3)
n	(n,1)	(n,2)	(n,3)

N(A) = 3; N (B) = 2; N(A x B) = 6

Generalizando, la cardinalidad de A x B se tiene: N(A x B) = N(A) N(B)

Propiedades del producto cartesiano

$Ax(B \cup C) = (AxB) \cup (AxC)$
$Ax(B \cap C) = (AxB) \cap (AxC)$
$Ax(B - C) = (AxB) - (AxC) = (AxB) \cap (AxC)^c$
$(A \cup B)xC = (AxC) \cup (BxC)$
$(A \cap B)xC = (AxC) \cap (BxC)$
$(A - B)xC = (AxC) - (BxC) = (AxC) \cap (BxC)^c$

Cuadro 2.10

Particiones

Sea el conjunto A ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}y los subconjuntos

$$B_1 = \{1,4\}, \quad B_2 = \{3,5,7\}, \quad B_3 = \{2,6\}, \quad B_4 = \{8,9\}$$

B_1, B_2, B_3, B_4, forman una familia de conjuntos β

$\beta = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, tiene dos propiedades fundamentales:

1. A es la unión de los conjuntos B_1, B_2, B_3, B_4, o sea $A = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$.

2. Para cualesquiera conjuntos de B_i y B_j, o $B_i = B_j$, o $B_i \cap B_j = \phi$

   Entonces una familia análoga o semejante de conjuntos que es una ***partición*** de A.

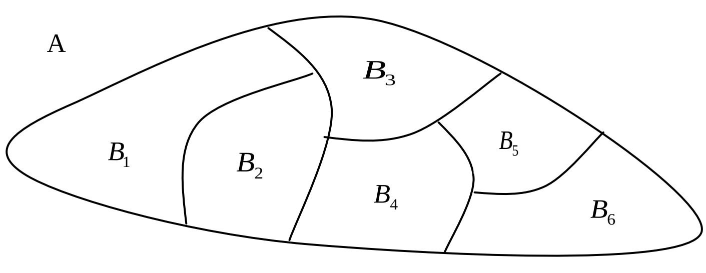
Definición 2.10.6: Dada una familia $\{B_i\}_{i \in I}$ no vacía de subconjuntos de A, $\{B_i\}_{i \in I}$ es una partición de A si cumple:

1. $P_1 : \cup_{i \in I} B_1 = A$

2. P_2: para cualquiera B_i, B_j, o bien $B_i = B_j$ o también $B_i \cap B_j = \phi$.

   Entonces cada B_i, es una **clase de equivalencia** de A

Lo manifestado se puede apreciar en la siguiente gráfica:



Gráfica 2.1

2.10.2 RELACIONES

Una relación R está conformada por:

1. Un conjunto A.
2. Un conjunto B
3. Un enunciado formal *P(x, y),* tal que *P(a, b*) es verdadero o falso para todo par ordenado *(a, b)* de A x B.

Definición 2.10.7: Se dice que R es una relación entre A y B, si cumple:

$$R = [A, B, P(x.y)]$$

A esto se suma, si *P(a, b*) es verdadero, se escribe **aRb**, que se lee: "a está relacionado con b".

Si P(a, b) es falso se escribe a $\not R$ b, que se lee "a no está relacionado con b"

Ejemplo 2.32: Sea R = (Z, Z, P(x, y), donde P(x, y) significa "x es menor que y". Queda claro que R es una relación, porque P(a, b), o lo que es lo mismo a < b, es verdadero o falso para todo par ordenado (a, b) de los enteros.

Con esto se puede decir que P (2,6) es verdadero, por lo que: 2R6, y

P (4,2) es falso; 4$\not R$ 2

Por otra parte, se tiene un caso de la vida cotidiana al tratar las longitudes de una barra y la sombra en algún momento que el Sol proyecta.

La longitud de la sombra que proyecta una barra depende de su longitud.

Los datos muestran las medidas de la longitud de una barra y la respectiva sombra en una hora determinada.

VARIABLES	MEDIDAS (cm)			
Longitud de la barra	1	2	3	4
Longitud de la sombra	2	4	6	8

En la tabla se observa dos conjuntos la longitud de la barra y la longitud de la sombra; los elementos del primer conjunto se relacionan con los elementos del segundo conjunto, es decir existe una correspondencia entre las medidas de la longitud de la barra (conjunto de partida) y las medidas de la sombra (conjunto de llegada).

Definición. Una relación R entre A y B es un subconjunto de A x B

Simbólicamente está representado por $R \subseteq AxB$

Ejemplo 2.33: Si Carlos es tío de César, se está levantando una relación entre ambos.

Si Carlos es elemento del conjunto A = {Pedro, Carlos, Alberto} y César es elemento del conjunto B = {María, César, Elena}; el par ordenado (Carlos, César), constituye un elemento del producto cartesiano A x B y es parte de la relación R: "x es tío de y", siendo $x \in A, y \in B$

Se pueden formar relaciones entre todos o algunos elementos del primer conjunto con uno o más del segundo conjunto; hay la posibilidad de que ningún elemento del primer conjunto se relaciones con ningún elemento de segundo conjunto, esta relación es **VACÍA.**

2.10.2.1 Cantidad de relaciones

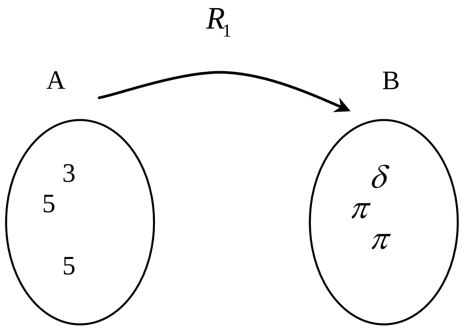
El número de relaciones de A en B es $2^{N(A)N(B)}$

Ejemplo 2.34: Dados los conjuntos A = {3, 5} y $B = \{\delta, \pi\}$, determinar analíticamente el número de posibles relaciones, y grafique los diagramas sagitales para todas las relaciones posibles.

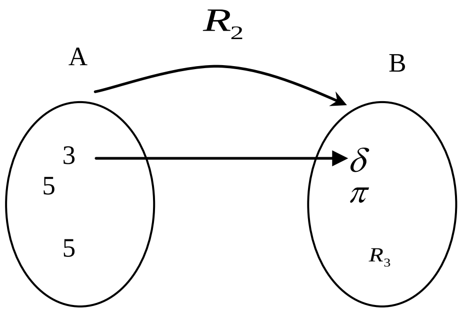
Solución:

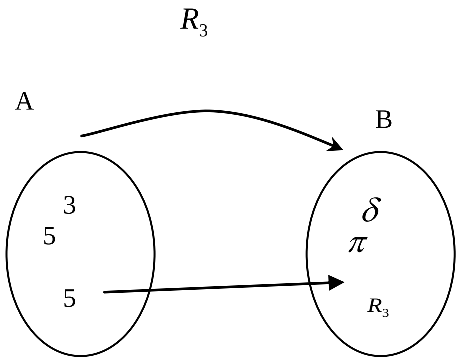
El número de relaciones de A en B es $2^{N(A)N(B)} = 2^{(2)(2)} = 2^4 = 16$

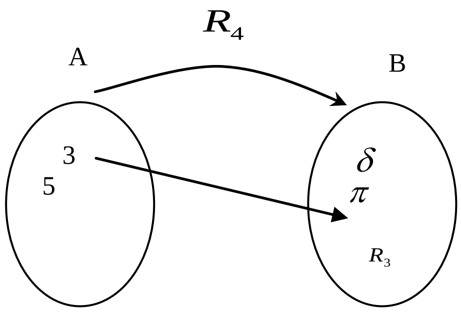
Caso 1: Ningún elemento del conjunto de partida está relacionado con ningún elemento del conjunto de llegada. (Relación vacía)

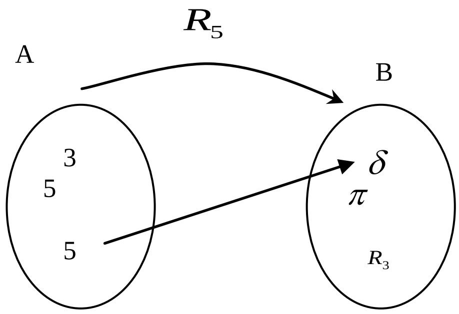


Caso 2. Relaciones de un solo elemento del conjunto de partida con un solo elemento del conjunto de llegada.

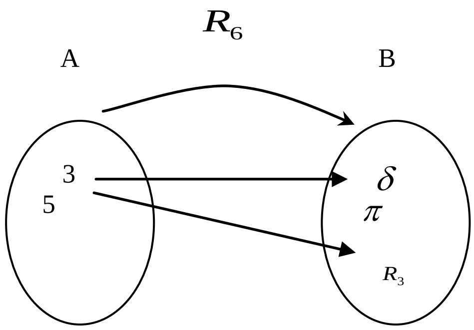


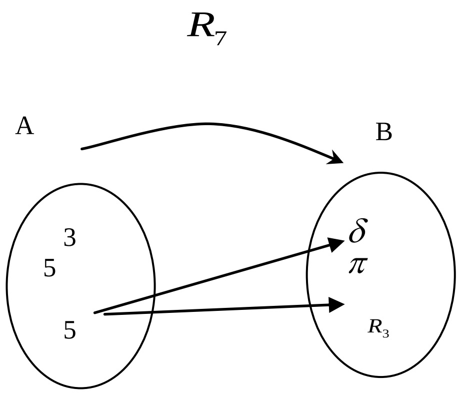




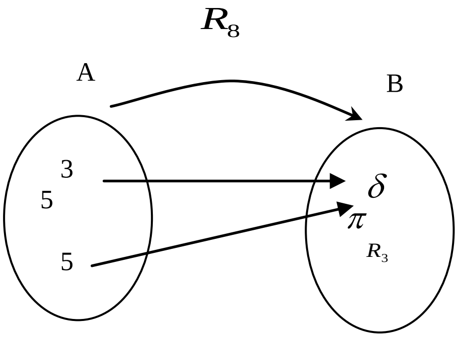


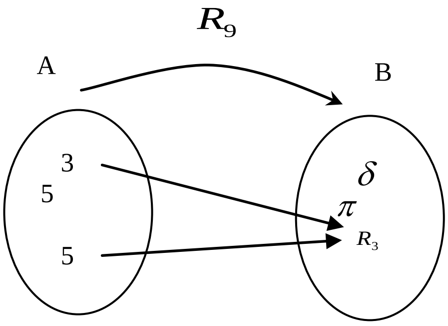
Caso 3: Relaciones de un solo elemento del conjunto de partida con dos elementos de llegada.



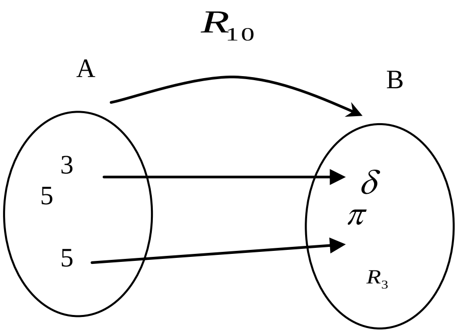


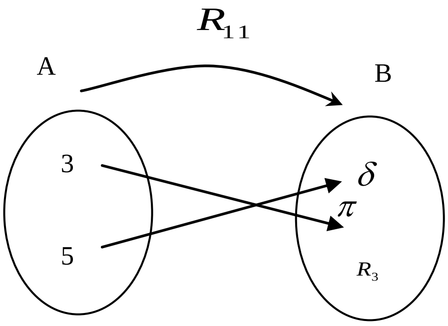
Caso 4: Relaciones de dos elemento del conjunto de partida con uno de llegada.



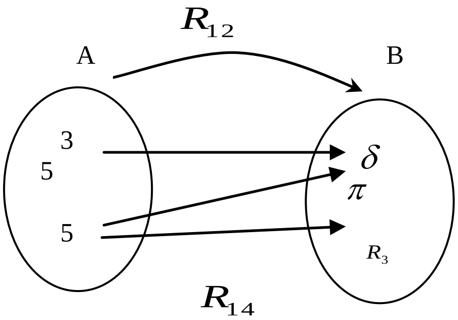


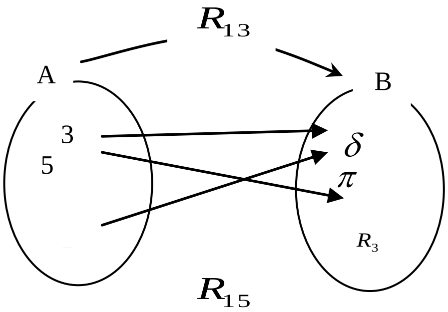
Caso 5: Relaciones de un elemento del conjunto de partida con uno de llegada.

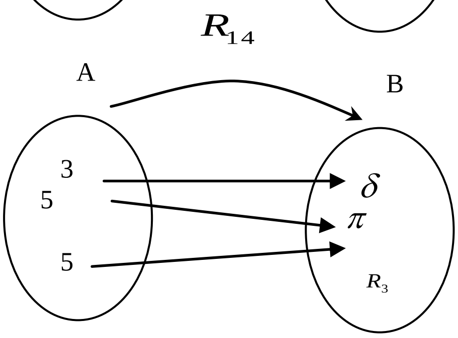


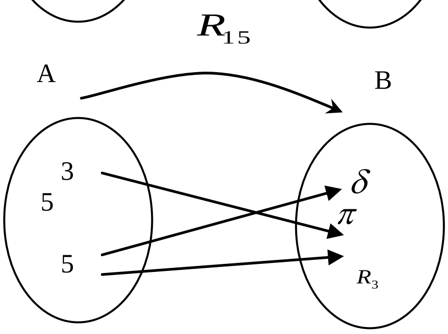


Caso 6: Relaciones de un elemento del conjunto de partida con dos del conjunto de llegada y el otro elemento de conjunto de partida con otro del conjunto de llegada.

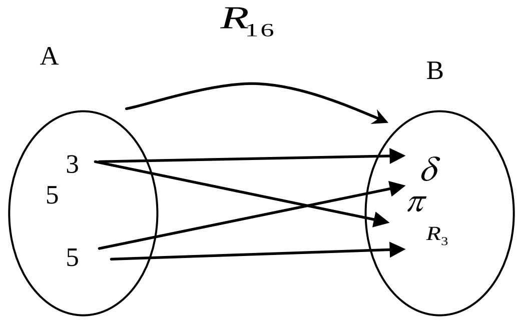








Caso 7: Relación de todos los elementos del conjunto de partida con todos los elementos del conjunto de llegada.



Dominio de una relación: los elementos de A constituyen el dominio de una relación. Simbólicamente representada por: $domR = \{a / \exists b[(a,b) \in R]\}$

Rango de una relación: los elementos de B, constituyen el rango, simbólicamente representado por: $rgR = \{b / \exists a[(a,b) \in R]\}$

Grafo de una relación

Definición 2.10.8: El grafo de R de A en B es un subconjunto de A x B

Gr (R) = {(a, b) / R(a) = b

$Gr(R) \subseteq AxB$

Ejemplo 2.35: Encuentre el grafo, dominio y rango de $R: A \to B$

$a \to R(a) = 2a$

A = {1, 2, 3, 4, 5}; B ={1, 3, 5}

Aplicando la definición de R

R(1) = 2(1) = 2; R(2) = 2(2) = 4; R(3) = 2(3) = 6; R(4) = 2(4) = 8; R(5) = 2(5) = 10

Gr (R) = { (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10}

dom R = {1, 2, 3, 4, 5}

rg R = {2, 4, 6, 8, 10}

2.10.3 PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

a. Relación recíproca

Definición 2.10.9: Toda relación R de A en B tiene una relación recíproca R^{-1}, que definida por:

$$R^{-1} = \{(a,b)/(b,a) \in R\}$$

Ejemplo 2.36: Sean A ={ m, n, s} y B ={1, 2, 3} y
R = {(m,1), (n, 2), (s, 3), (m, 2), (s, 2)}

La relación recíproca es: $R^{-1} = \{(1,m),(2,n),(3,s),(2,m),(2,s)\}$

b. Relación reflexiva o idéntica

Definición 2.10.10: Todo elemento de A se relaciona consigo mismo, se denota:

$\forall a \in A, (a,a) \in R$

Ejemplo 2.37: Dado el conjunto A ={1, 2, 3, 4, 5}

R = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)}, la relación R es reflexiva.

R	1	2	3	4	5
1	✓				
2		✓			
3			✓		
4				✓	
5					✓

c. Relación irreflexiva o anti reflexiva

Definición 2.10.11: Ningún elemento de A se relaciona consigo mismo, se denota:

$\forall a \in A, (a,a) \notin R$

Ejemplo 2.38: Dado el conjunto A = {1, 2, 3, 4}

R = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)}. La relación R no está relacionada consigo mismo.

R	1	2	3	4
1		✓	✓	✓
2			✓	✓
3				✓
4				
5				

d. Relación simétrica

Definición 2.10.12: Una relación es simétrica cuando un elemento se relaciona con un segundo elemento, y el segundo se relaciona con el primero. Simbólicamente se representa:

$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ o $aRb \Rightarrow bRa$

Ejemplo 2.39: Dado el conjunto A = {1, 2, 3, 4} y,
R = {(1,3), (4, 2), (2,4), (3,1), (2,3), (3,2)}

Es una relación simétrica puesto que: 1R3 o 3R1; 2R4 o 4R2; 2R3 o 3R2
Gráficamente en el diagrama se observa la simetría.

R	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Las celdas sombreadas dan testimonio de la relación simétrica.

e. Relación antisimétrica

Definición 2.10.13: La relación es antisimétrica cuando:

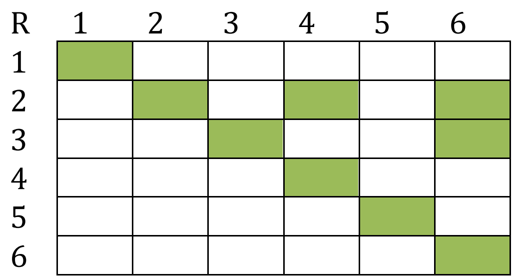
$$\forall(a,b)\in R \quad y \quad (b,a)\in R \quad implica \quad a=b$$

Ejemplo 2.40: dado N = {1, 2, 3, 4, 5, 6} y P(a,b) significa “a divide a b”, se obtiene:

R = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,4), (2,6), (3,6)}

La relación es antisimétrica, puesto que cumple con la definición.

Gráficamente se verifica:



f. Relación transitiva

Definición 2.10.14: Una relación R en un conjunto A, se dice que es transitiva si:

$$\forall(a,b,c)\in A:[(aRb)\wedge(bRc)]\Rightarrow aRc$$

Al decir a < b y b < c, entonces a < c, esta relación es transitiva

Ejemplo 2.41: Dado el conjunto A = {1, 2, 3, 4}, y

R = {(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)}

Demostrar que es una relación transitiva.

3R2 y 2R1, entonces 3R1

4R2 y 2R1, entonces 4R1

4R3 y 3R2, entonces 4R2

4R3 y 3R1, entonces 4R1

Gráficamente

R	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Las celdas sombreadas corresponden a la relación transitiva.

g. Relación de equivalencia.

Definición 2.10.15: Una relación es equivalente, si es reflexiva, simétrica y transitiva a la vez.

Ejemplo 2.42. Dado el conjunto V = {a, e, i) y

R = {(a, e), (a, i), (a, a), (e, i), (i, e), (e, a), (e, e), (i, a), (i, i)}

De la relación dada se desprende:

$R_1 = \{(a,a),(e,e),(i,i)\}$, es **reflexiva**

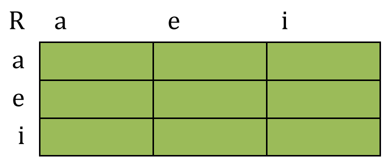
$R_2 = \{(a,e),(e,a),(e,i),(i,e)\}$, es **simétric**a, y

La relación R **es transitiva** porque:

$$
\begin{array}{l}
(eRi) \quad y \quad (iRa) \Rightarrow \quad (eRa) \\
(eRa) \quad y \quad (aRi) \Rightarrow \quad (eRi) \\
(iRa) \quad y \quad (a\,\mathrm{Re}) \Rightarrow \quad (i\,\mathrm{Re}) \\
(aRi) \quad y \quad (i\,\mathrm{Re}) \Rightarrow \quad (a\,\mathrm{Re}) \\
(a\,\mathrm{Re}) \quad y \quad (eRi) \Rightarrow \quad (aRi) \\
(i\,\mathrm{Re}) \quad y \quad (eRa) \Rightarrow \quad (iRa)
\end{array}
$$

Por lo tanto **la relación es de equivalencia**

Gráficamente la relación se puede expresar:



2.10.4 MATRIZ DE UNA RELACIÓN

Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$ conjuntos finitos que contienen m y n elementos respectivamente y si R es una relación de A en B.

La matriz de una relación se representa por: M_R

Definición 2.10.16: $M_R = (m_{ij}) / m_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad (a_i, b_j) \in R \\ 0 & si \quad (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$

M_R Es una matriz booleana

TEOREMA

Toda relación definida en conjuntos finitos, tiene representación matricial booleana y recíprocamente toda matriz booleana representa una relación

Ejemplo 2.43: Sea A ={5, 7 , 10, 12, 14} y sea R en A definida por $aRb \Leftrightarrow a/b$.

La matriz está formada por:

$M_R =$

R	5	7	10	12	14
5	1	0	1	0	0
7	0	1	0	0	1
10	0	0	1	0	0
12	0	0	0	1	0
14	0	0	0	0	1

DÍGRAFO O GRAFO DIRIGIDO DE R

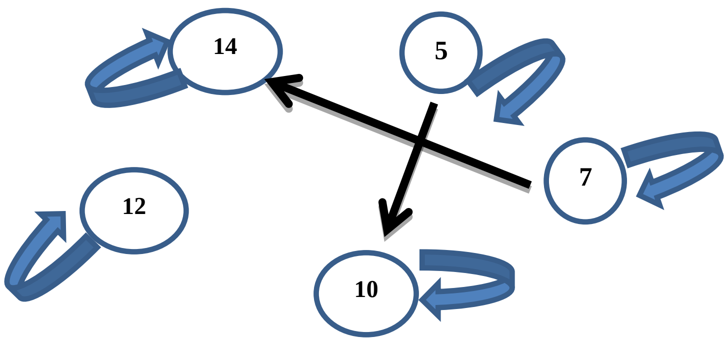
Si A es un conjunto finito y R es una correspondencia o relación definida en A, se puede representar gráficamente. Los pasos que se dan son:

1. En un círculo se representa cada elemento de A, estos se denominan vértices o nodos.

2. De cada vértice a_i sale una flecha al vértice a_j si y solo si $(a_i, a_j) \in R$.

Esta representación gráfica se llama Dígrafo o grafo dirigido de R.

El gráfico del ejemplo 2.42 es:



Dígrafo 2.1

Grado interno y grado externo de un vértice o nodo.

Definición 2.10.17: El grado interno de un vértice, es el número de arcos que terminan en el vértice.

Definición 2.10.18: El grado externo de un vértice, es el número de arcos que sale del vértice, el grado externo de a es $|R(a)|$.

Ejemplo 2.44: Sea A= {a, b, c, d, e}, y sea R la relación sobre A que tiene la matriz:

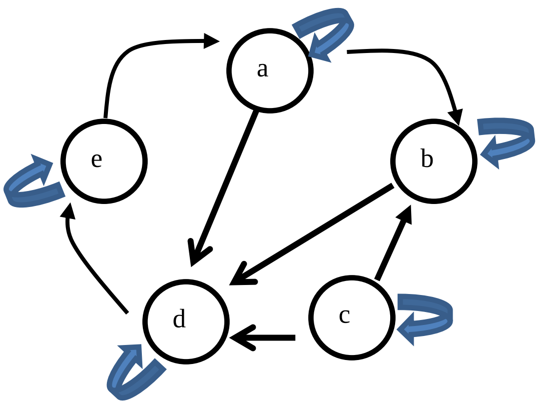
R	a	b	c	d	e
a	1	1	0	1	0
b	0	1	0	1	0
c	0	1	1	1	0
d	0	0	0	1	1
e	1	0	0	0	1

1. Encuentre la relación R
2. Construya el dígrafo correspondiente a la relación R.
3. Mediante una tabla encuentre el grado interno y externo de la relación R.

Solución:

1. $R=\{(a,a),(a,b),(a,d),(b,b),(b,d),(c,d),(c,b),(c,c),(d,d),(d,e),(e,e),(e,a)\}$.

2. El dígrafo



Dígrafo 2.2

3. Grado interno y externo

	a	b	c	d	e
Grado interno	2	3	1	4	2
Grado externo	2	2	3	2	2

Trayectorias en relaciones y dígrafos

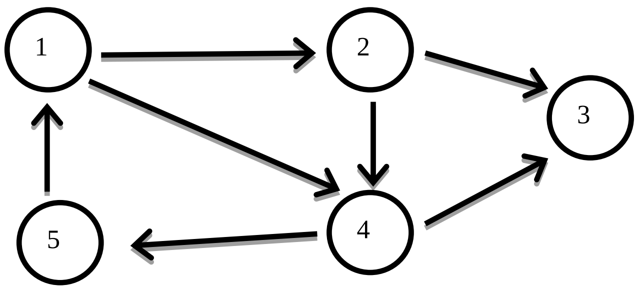
Definición 2.10.19: Una trayectoria de longitud n en R de a a b, es una secuencia finita de $\pi : a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$, que comienza en a y termina en b, de manera que:

$$aRx_1, x_1Rx_2, x_2Rx_3, \ldots x_{n-1}Rb$$

Una trayectoria se puede identificar con mayor rapidez en el dígrafo siguiendo las direcciones que indica la flecha.

La longitud de la trayectoria es el número de arcos que existen en la misma.

Ejemplo 2.45: Considérese el dígrafo que está a continuación; se identifica π_1: 1, 2, 3, es una trayectoria de longitud 2 del vértice 1 al vértice 3, π_2: 1, 4, 5, 1, es una trayectoria de longitud 3, del vértice 1 al mismo lugar; π_3: 1, 2, 4, 5, 1, es una trayectoria de longitud 4, parte de 1, hacia el mismo lugar; π_4: 1, 4, 3, es una trayectoria de longitud 2 del vértice 1 al vértice 3; π_5: 2, 4, 3, es una trayectoria de longitud 2 del vértice al vértice 3.



Dígrafo 2.3

La trayectoria que inicia y termina en el mismo nodo, se llama ciclo, π_2 y π_3 son ciclos de longitud 3 y 4 respectivamente.

GUÍA DE ESTUDIO 14

Objetivos

- Distinguir el grafo, dominio y rango en la relación de dos conjuntos A y B.
- Identificar las propiedades de las relaciones.
- Construir matrices de una relaciòn y los dígrafos o grafos dirigidos correspondientes.

Actividades

En equipo de tres estudiantes o individualmente en el tiempo de esudio o trabajo autónomo dar respuesta a los ejercicios y en lo posible verificar los resultados para su comprobación.

1. Sea R una relaciòn de A = {1, 3, 5, 7} y B = {1, 2, 3}definida por los enunciados de de la forma "x mayor que y"; "x menor que y"; "x mayor o igual que y"; "x menor o gual que y".
   a. Encuentre el conjunto solución de cada uno de los eneunciados de R. (Conjunto de parejas ordenadas).
   b. En diagramas de coordenadas A x B, represente cada una de las relaciones.

2. Dada la relación $R = \{(1,a),(2,b),(2,c),(1,b),(3,c)\}$, identifique el dominio, rango y la recíproca.

3. Dado el conjunto A = {6, 7, 8, 9} y R = {(6, 7), (7, 8), (8, 9), (8, 7), (7, 6), (9, 8), la relación es:______
   a. Reflexiva.
   b. Simétrica.
   c. Transitiva.
   d. Recíproca.

4. Dado el conjunto A = {3, 4, 5} y la relaciòn o gradiente R = {(3,4), (4,3), (3,3), (4,5), (5,4), (4,4), (3,5), (5,3), (5,5)}. La relaciòn R, es: ______

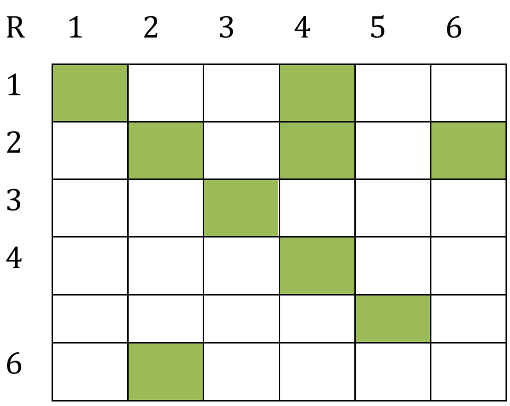
   a. Reflexiva

   b. Transitiviva.

   c. Simétrica

   d. De equivalencia

5. En el diagrama, la celdas coloreadas indican la relación R



   El diagrama representa una relación:______

   a. Reflexiva.

   b. Simétrica.

   c. Antisimétrica,

   d. Recíproca

6. Sea A = {x, y, z, w} y sea la relación R sobre A que tiene la matriz:

R	x	y	z	w
y	1	1	0	0
z	0	1	1	1
w	0	0	1	1

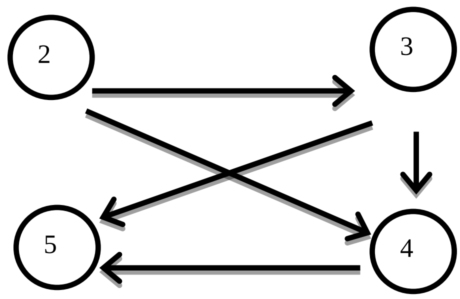
a. Escriba la relación R.

b. Construya el dígrafo de la relación.

c. Identifique el grado interno y externo.

d. Determine la trayectoria.

7. Del dígrafo siguiente:



a. Identifique:

- La relación R

- El tipo de relación

b. El grado interno y externo.

c. La longitud de las trayectorias.

8. Sea A = {a, b, c, d}, y sea R la relación sobre A que tiene la matriz:

R	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	1
c	1	1	1	1
d	0	1	0	1

a. Escriba la matriz R.

b. Identifique el dominio de R.

c. Identifique el rango de R.

d. Construya el dígrafo.

e. Identifique los grados interno y externo.

f. Determine la longitud de las trayectorias.

9. Dados los conjuntos $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{4,5\}$, el número de relaciones entre A y B, es: ______
   a. 16
   b. 8
   c. 32
   d. 64

10. Si $A=\{1,3,5,7\}$ y $a \to R(a)=3a$, el grafo de R, es: _____
    a. $\{(1,3),(1,5),(1,7),(3,5)\}$
    b. $\{(3,1),(5,1),(7,1),(7,5)\}$
    c. $\{(1,3),(3,9),(5,15),(7,21)\}$
    d. $\{(3,1),(9,3),(15,5),(21,7)\}$

11. Dado el conjunto $A=\{5,6,7,8\}$, y $R_1=\{(5,6),(5,7),(6,7),(7,8),(6,8)\}$, la relación es: _____
    a. Reciproca
    b. Reflexiva
    c. Simétrica
    d. Transitiva

12. Una función es inversible si y solo si, es: _____
    a. Inyectiva
    b. Sobreyectiva
    c. Biyectiva
    d. Ninguna de las anteriores

13. Dados $f(x) = 2x - 3$ y el $domf = \{1,2,3,4\}$, el rgf , es: _____

a. $\{-1,3,5\}$

b. $\{-1,1,3,5\}$

c. $\{1,3,5\}$

d. $\{-1,1,3\}$

14. Dados $g(x) = x^2 + 1$ y el $domg = \{-1,1,3,5\}$, el $rg(g)$, es: _____

a. $\{-2,-2,10,26\}$

b. $\{2,-2,10,26\}$

c. $\{-2,2,10,26\}$

d. $\{2,2,10,26\}$

UNIDAD 3

Funciones matemáticas

3.1 Aplicaciones

3.2 Funciones

3.3 Tipos de funciones

3.4 Funciones con variable real

Objetivos

- Ofrecer al estudiante conceptos claros sobre aplicaciones y funciones matemáticas para identificar en las diferentes actividades del quehacer humano.

- Revisar o conocer los tipos más importantes de las funciones para caracterizar cada uno de ellos.

- El carácter teórico de las funciones debe explicar y sintetizar en forma gráfica para conocer sus variaciones.

Vínculos:

Lea y comente con sus compañeros de aula y emita conclusiones sobre:

Relaciones humanas: Al hablar con las personas, nada hay tan agradable y animante como una palabra de saludo cordial, respetuoso, amable, particularmente se necesita de "gestos amables".

¿En el hogar, en el sitio de trabajo, en la calle, en el aula, en la universidad, etc., las personas son amables, respetuosas, generosas, puntuales en el cumplimiento de sus deberes y obligaciones? Si no lo son ¿qué haría usted?

3.1 Aplicaciones

Sean a y b dos objetos matemáticos preestablecidos, y en ese orden, se crea la abreviatura matemática llamada par y se denota (a, b), que cumple el criterio axiomático de igualdad:

"los pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales, si y solo si a = c y b = d, simbólicamente

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow(a=c)\wedge(b=d)$$

Téngase en cuenta que dos objetos matemáticos distintos a y b, es posible formar dos pares distintos: el (a, b) y el (b, a).

Sean A y B dos conjuntos. El conjunto $AxB=\{(a,b)/\,a\in A\wedge b\in B\}$. Se llama **producto cartesiano de A y B.**

Sean los conjuntos X e Y. A todo conjunto F de X x Y, se llama **correspondencia entre X e Y**.

Si (x, y) ϵ a F. Se dice que x corresponde a y, o también y = f(x). Al subconjunto F de X x Y, se llama **grafo de una correspondencia.**

En toda correspondencia $F\subset XxY$, existen cuatro conjuntos.

Conjunto inicial es el conjunto X, conjunto final es el conjunto Y, conjunto imagen es el conjunto $im(F)=F(x)\subset Y$ ***, el conjunto original es el conjunto*** $OR(F)=F^{-1}(y)\subset x$

Ejemplo 3.1: Demostrar que A x (B – C) = (A x B) – (A x C)

Solución:

$$\forall(x,y)\in Ax(B-C)\Rightarrow x\in A\wedge y\in(B-C)\Rightarrow\{x\in A\wedge y\in B\wedge x\notin C\}\Rightarrow$$
$$(x.y)\in AxB\wedge(x,y)\notin AxC\Rightarrow(x,y)\in(AxB)-(AxC)$$

Definición 3.1 Aplicación o función de X en Y

Sea $F \subset XxY$ una correspondencia de X a Y.

Se dice que F es una aplicación de X en Y cuando se verifica.

a. OR F = X; es decir $\forall x \in X, \exists y \in Y$, tal que $(x, y) \in F$.
b. $\forall x \in X$ existe un único $y \in Y$, tal que $(x, y) \in F$

La notación de una aplicación es: $F : X \rightarrow Y$ o $f : A \rightarrow B$

3.2 Funciones

En los modelos matemáticos, las relaciones se representan en general por medio de **funciones matemáticas** o simplemente **funciones.**

Definición 3.2: Función es una correspondencia entre conjuntos numéricos en el que el conjunto inicial coincide con el origen o dominio o entrada es decir todos los elementos de X deben tener, al menos una imagen o rango o codominio o salida, elementos de Y.

PUNTO DE APOYO **Toda función es una relación, pero no toda relación es una función.**

Notación de funciones

La ecuación funcional tiene dos variables x e y, la primera es la variable independiente y la segunda variable dependiente. La notación es

$$y = f(x)$$

Que se lee***: "y es igual a f de x" o "y es una función en x"***

Nota: la ecuación funcional **no debe leerse "y es igual a f por x"**

Existen otras formas de notación tal como g(x) o u = g(v), etc.

3.3 Tipos de funciones

Las funciones tienen varias características, dependen de la cardinalidad de los conjuntos de partida y de llegada.
Dependiendo de las características se pueden graficar los conjuntos, los tipos de funciones es necesario tener presente para el análisis en las funciones algébricas con variable real.

3.3.1 Aplicación o función inyectiva

Definición 3.3

$f : A \to B$, es inyectiva $\Leftrightarrow \{\forall(x_1, x_2) \in A[(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))]\}$

La función es inyectiva si todo elemento del rango es imagen exclusiva de un solo elemento del dominio.
La cardinalidad del conjunto A es menor o igual a la cardinalidad del conjunto B, es decir: $N(A) \leq N(B)$

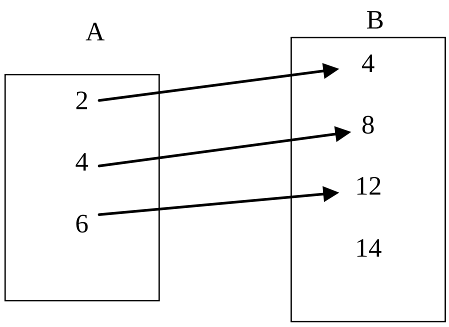
Ejemplo 3.2: Dados los conjuntos A = {2, 4, 6}; B = {4, 8, 12, 14}, y

$f : A \to B$, "y es doble de x"

Solución:

$f = \{(2,4),(4,8),(6,12)\}$

Gráficamente



dom f = A
rg f = {4, 8, 12}
F es inyectiva

Si la función es inyectiva, se puede retornar de f(x) a x por un solo camino

3.3.2 Aplicación o función sobreyectiva

Definición 3.4

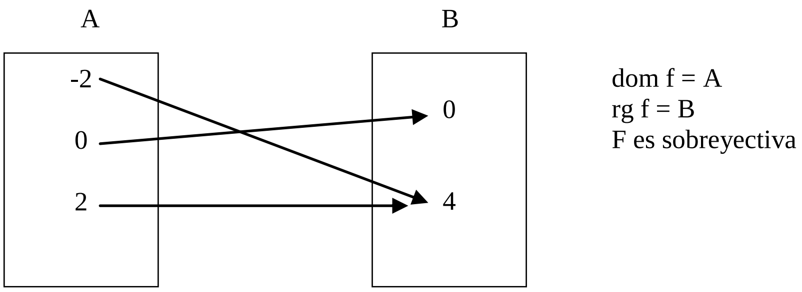
$f: A \to B$, es sobreyectiva $\Leftrightarrow \{\forall y \in B, \exists x \in A / y = f(x)\}$, para construir funciones sobreyectivas hay que considerar $N(A) \geq N(B)$

Ejemplo 3.3: dados los conjuntos $A = \{-2,0,2\}; B = \{0,4\}$, y

$f: A \to B$, "y es cuadrado de x"

$f = \{(-2,4),(0,0),(2,4)\}$

Gráficamente



De lo observado se puede deducir que:

- Las funciones que son inyectivas no necesariamente son sobreyectivas.
- Las funciones que son sobreyectivas no necesariamente son inyectivas.

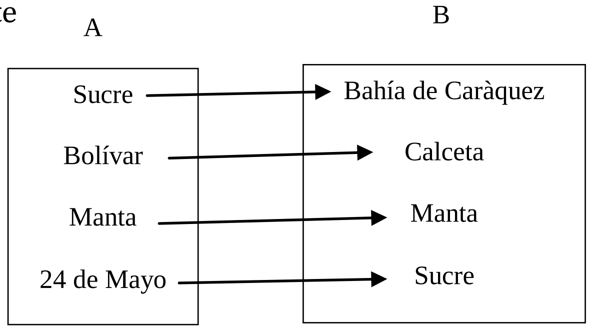
3.3.3 Aplicaciones o funciones biyectivas

Definición 3.5: una función f es biyectiva $\Leftrightarrow$ f es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejemplo 3.4: Dados los conjuntos A = {Sucre, Bolívar, Manta, 24 de Mayo}: B = {Bahía de Caráquez, Calceta, Manta, Sucre} y $f: A \to B$, "y es cabecera cantonal de x" f: {(Sucre, Bahía de Caráquez), (Bolívar, Calceta), (Manta, Manta), (24 de Mayo, Sucre)}

dom f = A
rg f = B
F es biyectiva

Gráficamente



Las funciones biyectivas tienen como propiedades las siguientes:

3.3.3.1 Función inversible

Definición 3.6: $f : A \rightarrow B$ es inversible $\Leftrightarrow$, si su relación inversa es una función de B en A.

Teorema 3.1: f es una función inversible si y solo si es biyectiva-

3.3.3.2 Función inversa

Definición 3.7: si $f : A \rightarrow B$, es biyectiva, se puede obtener la inversa $f^{-1} : A \rightarrow B$, el orden de los conjuntos se cambian, el dominio de f es el rango de f^{-1}, y el rango de f es el dominio de f^{-1}

dom f = rg f^{-1}
rg f = dom f^{-1}

Tomando el ejemplo 3.4

$f^{-1} : A \rightarrow B$, es “x es cabecera cantonal de y”

f^{-1} = {(Bahía de Caráquez, Sucre), (Calceta, Bolívar), (Manta, Manta), (Sucre, 24 de Mayo)}

3.3.3.3 Función compuesta

Definición 3.8: Dadas las funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, la función compuesta tiene como notación gof, es una función que tiene relación los elementos del conjunto A con los elementos del conjunto C, partiendo de un elemento x de A, se obtiene un elemento g (f(x)) de C.

En el gráfico siguiente se puede observar la composición de funciones.

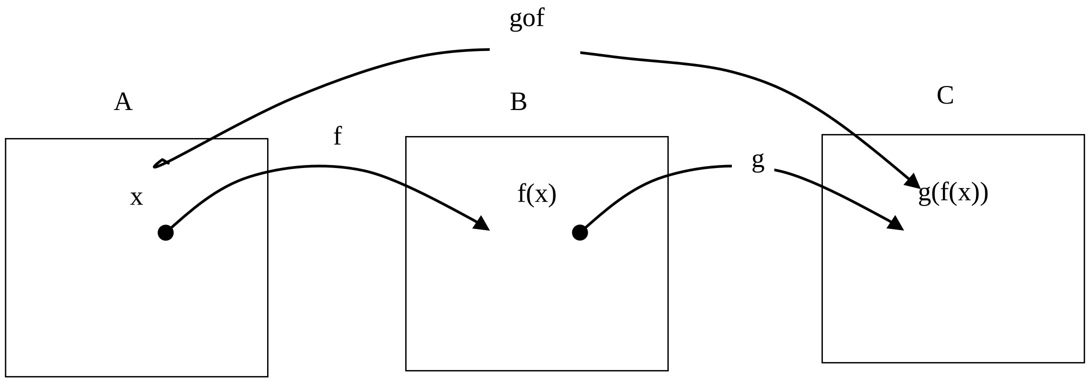


Figura 3.1 Composición de funciones gof

Hay que tener en cuenta que $gof \Leftrightarrow rgf \subseteq domg$

Gof es el conjunto de pares ordenados de la forma (x, g(f(x))

En conclusión, el dom(gof) = A, y que el rg(gof) $\subseteq$rg g$\subseteq$C

La composición de funciones fog, siendo que $g : B \to C$ y $f : C \to A$, se tiene en la figura 3.2

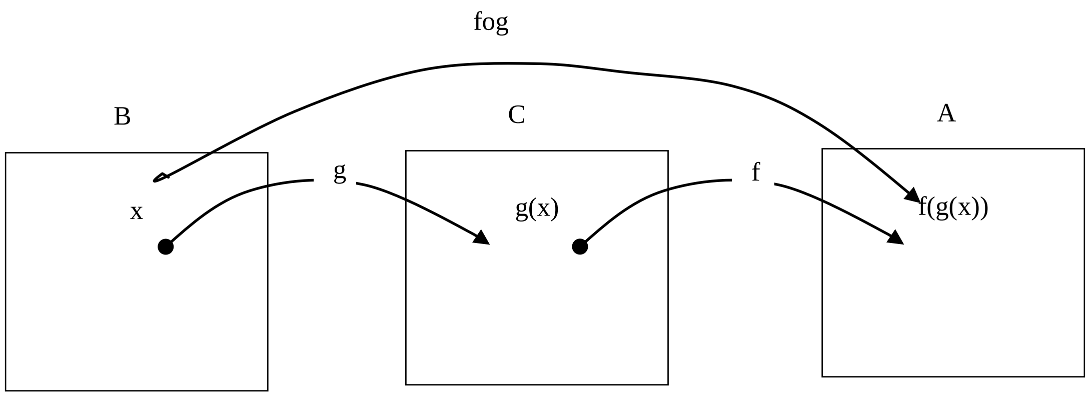


Figura 4.2 Composición de funciones fog

La función fog existe, si y sòlo si: $rgg \subseteq domf$, en donde el $dom(fog) = B$, y el $rg(fog) \subseteq rgf \subseteq A$

La composición de funciones no cumple con la propiedad conmutativa.

Ejemplo 3.5: Dados los conjuntos A = {a, b, c}; B = {1, 2, 3}

$f : A \rightarrow B$ es $f = \{(a,1),(b,2),(c,3)\}$

$f^{-1} : B \rightarrow A$, es $f^{-1} = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

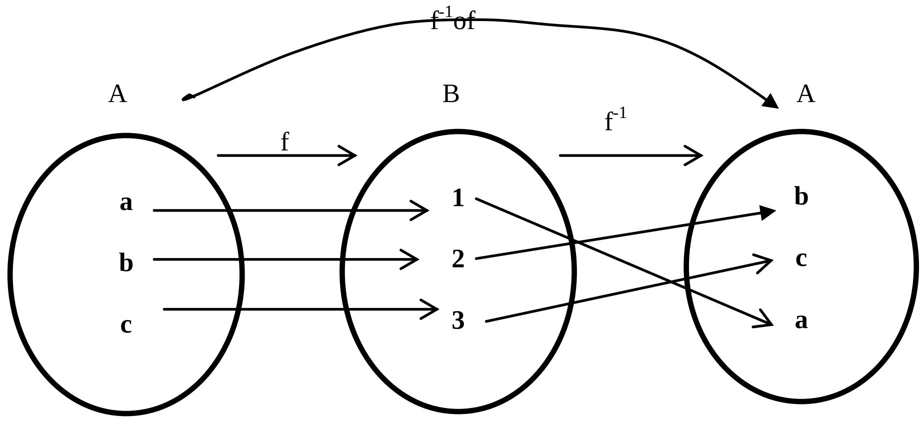
También se puede obtener otras funciones como:

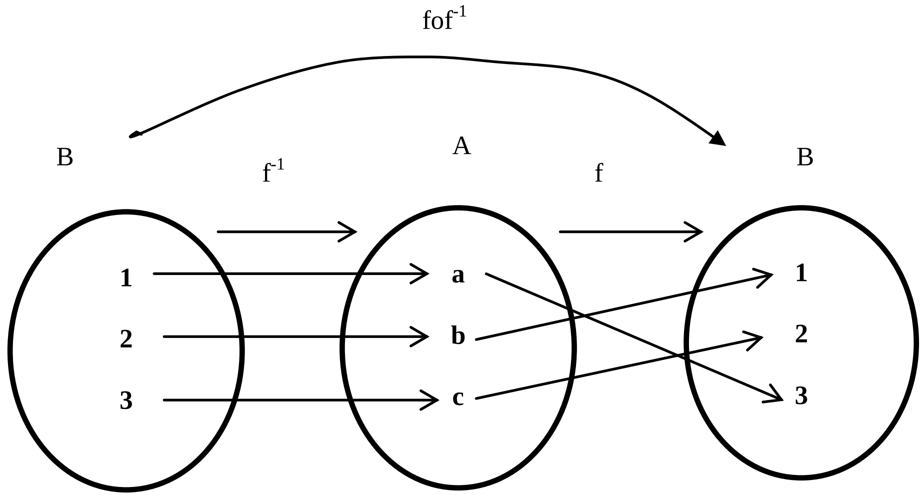
$f^{-1}of : A \rightarrow A$

$f^{-1}of = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$

$f^{-1}of : B \rightarrow B$

$f^{-1}of = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$





Los pares ordenados tienen las mismas componentes, esto quiere decir que es una función idéntica $x \in A$ y $y \in B$; $f^{-1}of = I(x)$ y $f^{-1}of = I(y)$; los elementos del conjunto de partida coinciden con los elementos del conjunto de llegada.

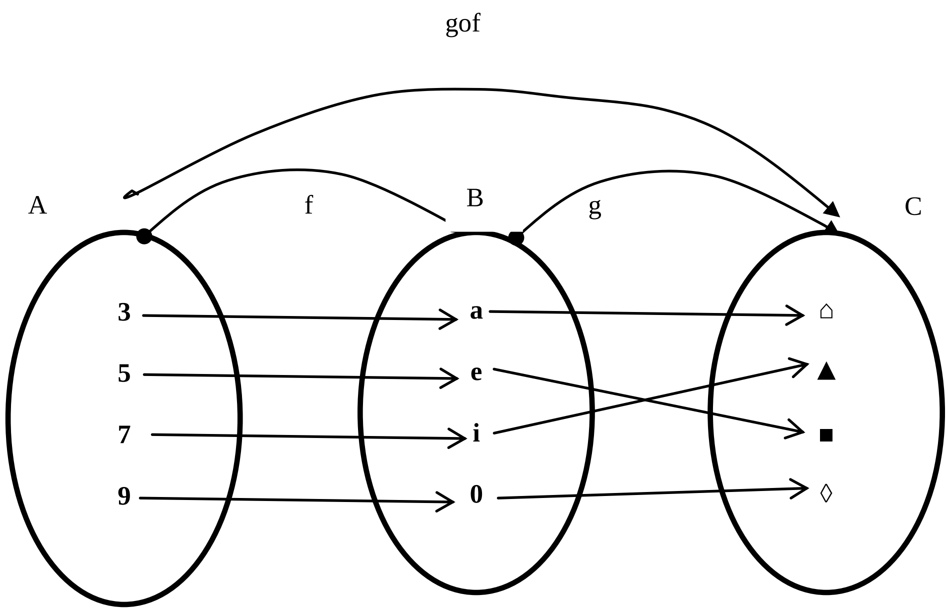
Ejemplo 3.6: Dados los conjuntos A = {3, 5, 7, 9}; B = {a, e, i, o}; C = {☖, ■,▲, ◊ } y D = {1, 2, 3}

$f: A \to B$; f = {(3,a), (5, e), (7, i), (9,o)}

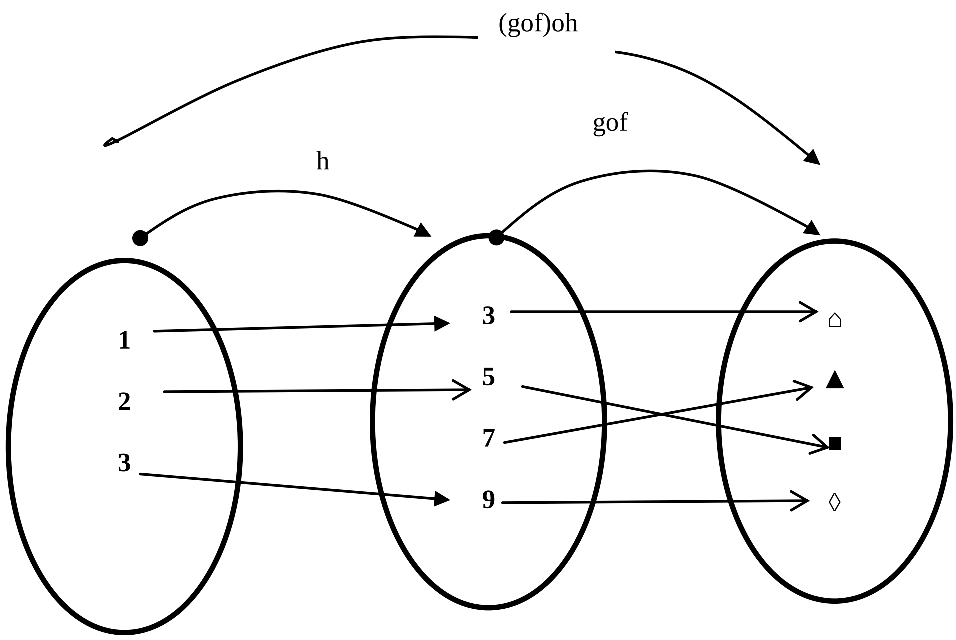
$g: B \to C$; g = {(a, ☖), (e, ■), (i, ▲), (o, ◊)}

$h: D \to A$; h = {(1, 3), (2, 5), (3, 9)}

Encontrar (gof)oh



Gof = {(3, ☖), (5,■), (7,▲), (9,◊)}



gof)oh **= {(1, ⌂), (2, ■), (3, ▲)}**

Ejemplo 3.7: Dadas las funciones f(x) = 2x – 1, $g(x) = 2x^2 - 3$ y $x = \{0,1,2,3\}$ como dominio. Encuentre:

a. *gof*

b. *fog*

Solución:

Conocido el dominio $x = \{0,1,2,3\}$,

$f(0) = 2(0) - 1 = -1$

$f(1) = 2(1) - 1 = 1$

$f(2) = 2(2) - 1 = 3$

$f(3) = 2(3) - 1 = 5$

Por lo que él $rgf = \{-1,1,3,5\}$, por lo tanto $rgf = domg$

Ahora:

$g(-1) = 2(-1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

$g(1) = 2(1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

$g(3) = 2(3)^2 - 3 = 18 - 3 = 15$

$g(5) = 2(5)^2 - 3 = 50 - 3 = 47$

Entonces $g(f(x)) = \{-1,-1,15,47\}$, este conjunto se puede verificar de la forma siguiente:

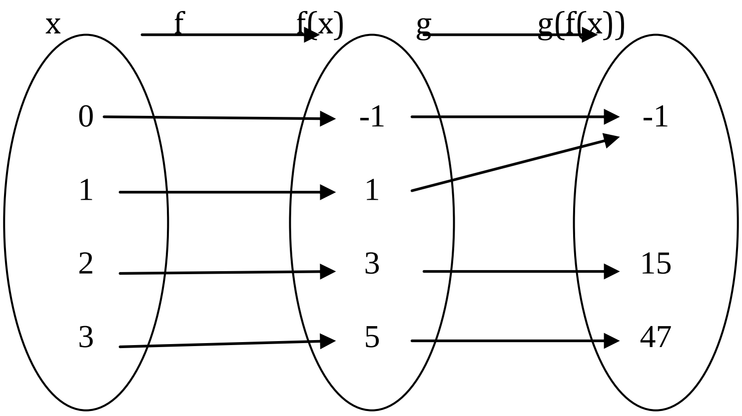
$g(2x-1) = 2(2x-1)^2 - 3 = 2(4x^2 - 4x + 1) - 3 = 8x^2 - 8x + 2 - 3 = 8(0) - 8(0) + 2 - 3 = -1$

$g(2(1)-1) = 8(1^2) - 8(1) + 2 - 3 = 8 - 8 + 2 - 3 = -1$

$g(2(2)-1) = 8(2^2) - 8(2) + 2 - 3 = 32 - 16 + 2 - 3 = 16 + 2 - 3 = 15$

$g(2(3)-1) = 8(3^2) - 8(3) + 2 - 3 = 72 - 24 + 2 - 3 = 47$

Gráficamente,



$gof = \{(0,-1),(1,-1),(2,15),(3,47)\}$

b.

$g(x) = 2x^2 - 3$, f(x) = 2x – 1 y $x = \{0,1,2,3\}$

$g(0) = 2(0^2) - 3 = -3$

$g(1) = 2(1^2) - 3 = 2 - 3 = -1$

$g(2) = 2(2^2) - 3 = 8 - 3 = 5$

$g(3) = 2(3^2) - 3 = 18 - 3 = 15$

$rg(g) = \{-3,-1,5,15\}$, por lo tanto $rg(g) = domf$

$f(-3) = 2(-3) - 1 = -6 - 1 = -7$

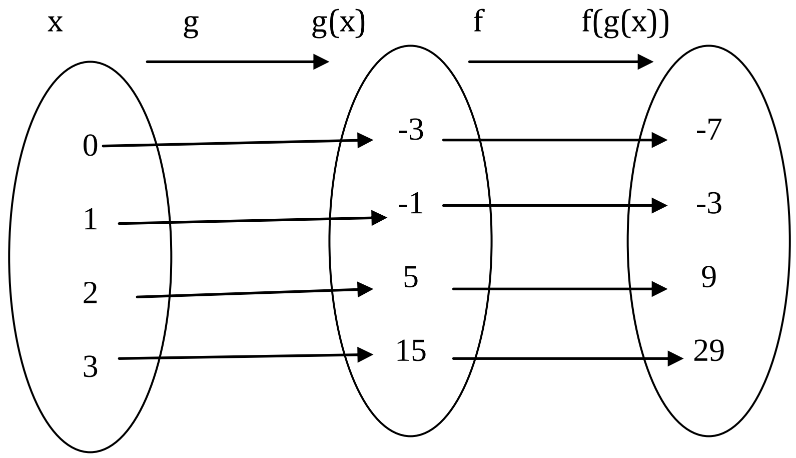
$f(-1) = 2(-1) - 1 = -2 - 1 = -3$

$f(5) = 2(5) - 1 = 10 - 1 = 9$

$f(15) = 2(15) - 1 = 30 - 1 = 29$

$rgf(f(x)) = \{-7,-3,9,29\}$

Gráficamente,



$fog = \{(0,-7),(1,-3),(2,9),(3,29)\}$

Ejemplo 3.8: La longitud de una sombra que proyecta una barra de hierro depende de su longitud.

Los datos de las medidas de la longitud de la barra y la sombra en una determinada hora del día son:

Longitud de la barra (m)	1	2	3	4
Longitud de la sombra (m)	2	4	6	8

Si la longitud de la sombra es y, la longitud de la barra es x. entonces se puede afirmar que la longitud de la sombra está en función de la longitud de la barra. La razón es 2 (constante), puesto que dos entre uno es dos, 4 entre dos es 2 y así sucesivamente. La expresión matemática es:

$$y = f(x) = 2x$$

Ejemplo 3.9: El departamento de ventas de Distribuciones Moya analiza la compra de un carro repartidor de productos. El gerente estima que el costo del vehículo equipado con refrigeración, es de USD 50 000,00. Hace una estimación de costo promedio de operaciones de 040 dólares por milla.

a. Escríbase la función matemática que represente el costo total C de la obtención y la operación del carro repartidor, en términos del número de millas x que recorra.
b. ¿Cuál es el costo proyectado si el carro recorre 70 000 millas de vida útil?
c. ¿Si recorre 120 000 millas?

Solución:

a) El costo total C está en función de las millas que recorrerá el vehículo.

$$C = f(x)$$

Costo de operación = 0.4x

Costo de compra = 50 000

C = f(x) = 0.4x + 50 000

b) Si el carro repartidor recorre 70 000 millas, el costo total es:

C = f (70000) = 0.4 (70 000) + 50 000

C = USD 78 000,00

c) Si recorre 120 000 millas

C= f (150 000) = 0.4 (120 000) + 50 000

C = USD 98 000,00

Dominio y rango restringidos

En el problema anterior el dominio es de cero hasta 120 000 millas; no existen valores negativos puesto que no hay millas negativas recorridas por lo que el **dominio queda restringido** en el intervalo

$$0 \leq x \leq 120000$$

El rango restringido está en función del dominio restringido, es decir:

$$50000 \leq C \leq 98000$$

3.3.4 Funciones Multivariadas

En las funciones matemáticas hay ocasiones en donde la variable dependiente está en función de dos o más variables independientes, dando lugar a las funciones multivariadas. En el mundo de los negocios se puede encontrar que las utilidades dependen del número de unidades vendidas, sumadas a otras variables que interactúan para obtener beneficios adecuados.

Entre las funciones multivariadas hay funciones bivariadas. La notación es:

$$z = f(x, y)$$

Las variables independientes son x e y

Ejemplo 3.10: $z = f(x, y) = x^2 - 6xy + y^2 - 6$

Dado (0,0), la función es

$$z = f(0,0) = 0^2 - 6(0)(0) + 0^2 - 6$$

$$z=-6$$

$$z=f(-2,3)=(-2)^2-6(-2)(3)+3^2-6$$
$$=4+36+9-6$$
$$=43$$

$$f(u,v)=u^2-6uv+v^2-6$$

En forma general las funciones multivariadas la notación es:

$$y=f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$$

El subíndice es el número de variables independientes.

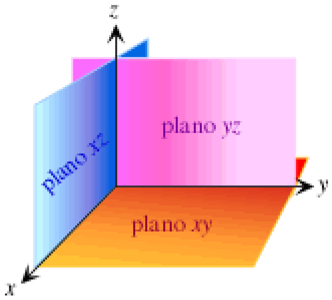
Resulta muy útil esta notación ya que en ocasiones pueden darse ejemplos con algunas variables independientes como en el caso siguiente:

$$y=f(x_1,x_2,x_3,x_4)=3x_1^{\,2}+5x_2x_3-x_4^{\,3}+7$$
$$f(-2,0,1,2)=3(-2)^2+5(0)(1)-(2)^3+7$$
$$=12+0-8+7$$
$$=11$$

Las funciones multivariadas en el campo de las ciencias, se tiene en:

- El volumen de un cono circular recto $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$, donde r es el radio de la base y h la altura del cono recto. (Geometría)
- La aceleración de un cuerpo $a=\frac{v-v_0}{t}$, donde v es velocidad final, v_0 es velocidad inicial y t tiempo. (Física).
- El volumen de un gas ideal $V=k\frac{T}{P}$, donde T es temperatura, P presión y k es una constante.
- Producción agrícola P = f(nutrientes, luz, humedad, etc.)

- En espacio tridimensional y la gráfica de una función con dos variables



- El cálculo diferencial, integral, ecuaciones diferenciales, se encuentra la aplicación de las funciones multivariadas.
- Estadística descriptiva, para describir el comportamiento de datos: media, varianza, correlación, dispersión, entre otros.

GUÍA DE ESTUDIO 15

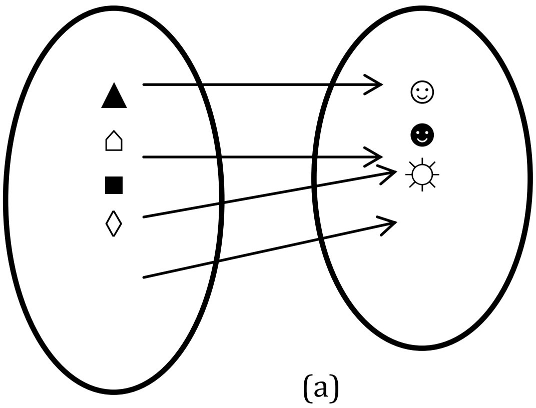
Objetivo

Consolidar el conocimiento de aplicaciones y tipo de funciones

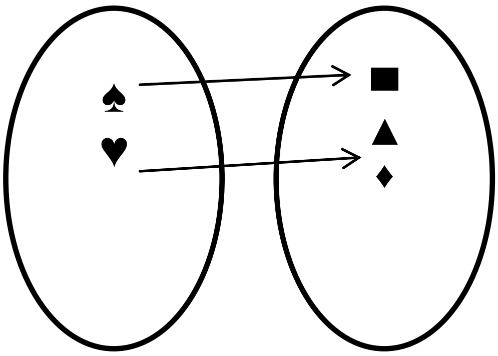
Actividades

En el tiempo destinado para el trabajo autónomo, resolver los ejercicios siguientes:

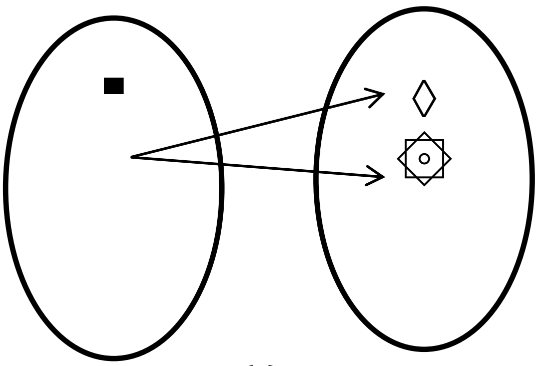
1. Dados los conjuntos A = {m , n}, B = {1, 2} y C = {2, 3, 4}. Encontrar:
   a. $Ax(B \cup C)$
   b. $Ax(B \cap C)$
   c. $Ax(B - C)$
   d. $Bx[(A \cup C) \cap C]$
2. Estudiar las relaciones e identificar el tipo de funciones en los gráficos siguientes:



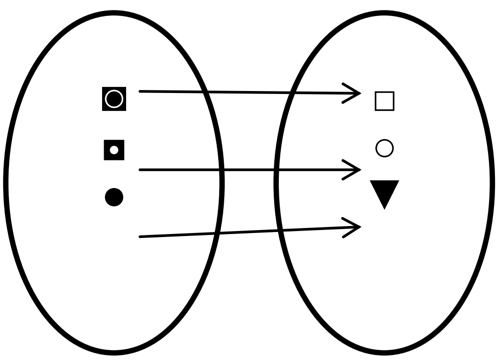
(a)



(b)



(c)



(d)

En los ejercicios del 3 al 12 determine: a) f(0), b) f (2), c) f(a), d) f (p + q)

3. $f(x) = 5x + 3$
4. $f(x) = 2x^2 - 6$
5. $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$
6. $f(x) = 40$
7. $f(x) = \frac{5}{2x}$
8. $f(x) = \frac{2x-4}{3x+4}$
9. $f(x) = x^3$
10. $f(x) = ax + b$
11. $f(x) = (2x+5)^{\frac{1}{2}}$
12. $f(x) = (4x+5)^3$

13. Dados los conjuntos A = {m, n, o}, B = { ♥, ☺, ♠}, C = {3, 5, 7} y D = {2, 4, 6}

$f : A \to B$; f = {(m, ☺), (n, ♥), (o,♠)}

$g : B \to C$; g ={☺,3), (♠, 5), (♥,7)}

$h : C \to D$; h = {(3, 4), (5, 6), (7,2)}

Encontrar:

a. Fog
b. gof
c. foh
d. hof
e. (fog)oh
f. (gof)oh
g. (goh)of
h. (hof)og

14. Dadas las funciones $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = 4 - 3x^2$ y $x = \{0,1,2,3,4\}$. Encuentre:

   a. *fog*

   b. *gof*

15. La función q = 120 – 0,5p, es la función de la demanda que expresa en dólares la cantidad de la demanda de un producto q en función del precio cobrado por el producto p. Determine el dominio y el rango restringidos.

16. Con dos estudiantes de aula plantee un problema de aplicación de función costo total de fabricar x unidades de un producto. Establezca el dominio y el rango restringido.

17. En $f(x, y) = x^2 - 5xy - y^2 - 24$. Determínese: a) $f(0,1)$, b) $f(2,3)$, c) $f(-1,4)$, y d) $f(-5,-7)$.

18. En $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1 - 5x_2x_3 - x_1x_3x_4$, determínese: a) $f(-4,-1,1,0)$, b) $f(1,0,2,3)$ y c) $f(m, n, o, p)$.

19. La empresa Distribuciones Moya estima que el número de unidades que vende cada año es una función de los gastos destinados a la publicidad por radio y prensa escrita. La función es:

$$z = f(x, y) = 1.2x + 0.08y - x^2 - y^2 - xy$$

Donde z es el número de unidades vendidas al año, x señala los gastos de publicidad por la radio e y indica los gasto de publicidad por la prensa (las cantidades en dólares)

   a. Encuentre las ventas anuales esperadas si se destina 16 dólares a la publicidad por la radio y 12 dólares a la publicidad por la prensa.

   b. ¿Cuáles serán las ventas futuras si se gastan 36 dólares y 30 dólares en publicidad por radio y prensa respectivamente?

20. Averigüe en una empresa local destinada a la comercialización de productos de consumo masivo sobre las clases de publicidad que emplean para la promoción de venta de sus artículos y que beneficios reciben. Construya una función matemática y encuentre las ventas en el año 2014, con los datos recibidos por publicidad.

21. Una función es inyectiva, cuando: ______

a. $N(A) < N(B)$

b. $N(A) > N(B)$

c. $N(A) \leq N(B)$

d. $N(A) \geq N(B)$

Facetas

QUÉ ES LA INVESTIGACIÓN

Gonzáles S. Miguel. Pérez A. Galo & Quezada Froilán. 1996. manifiestan:

> Según Armando Asti Vera "La investigación es algo indefinible, aunque existen muchas opiniones cuyas definiciones no se acercan a la realidad. La investigación sería algo asi como todo lo que se hace para llegar a la verdad".
>
> Tal vez el concepto griego *ALETEIA* es lo que se acerca al concepto de la investigación. *ALETEIA* significa develar, correr el velo para ver la realidad.
>
> Pero ¿Qué es la verdad?. Según Ouspensky, la mentira es pronunciarse acerca de lo que se cree que es verdad o, en otras palabras, cuando el hombre no sabe que miente, más adelante afirma que la verdad no nos es posible conocerla en nuestro estado presente de evolución, pues solo se la alcanza con la conciencia objetiva, es decir, cuando se tiene la conciencia de todas las cosas de todo el universo tal cual es.
>
> Para Rodolfo Mandolfo, investigar es tener conciencia de un problema para llegar a la solución. Para Einstein, es el goce de la comprensión. Para Aristóteles, el aprehender es el más grande de los placeres.
>
> La investigación pura, según Bacon es una parte de la búsqueda del conocimiento guiado simplemente por el intelecto, la investigación aplicada resuelve problemas más concretos. Bacon en Novum Organum señala la diferencia entre investigación pura e investigación aplicada: la primera es una fuente de luz que aprovecha la investigación aplicada. La investigación científica está dirigida al desarrollo.

Para cientistas en reuniones académicas dicen que “el fin esencial de la investigación es extender el conocimiento científico y profundizar nuestra comprensión de la naturaleza”. La investigación científica es importante para la nación porque es fuente de aumento del saber, elemento esencial para el sistema de educación, creadora de valores culturales por constante renovación de horizontes intelectuales, medio para alcanzar objetivos económicos y sociales.

Como proceso, a la investigación se la puede definir, como una serie de pasos que dan respuesta lógica a una pregunta específica. El ser humano observa. De la demostración se forman juicios. Con los juicios se construye hipótesis de posibilidad que somete a un procedimiento inductivo – deductivo para ver si son válidas. Un conjunto de hipótesis válidas forma una teoría válida. Un conjunto de teorías forma una ley. Finalmente, un conjunto de leyes válidas constituye una ciencia.

Para llegar a la ciencia se recurre a la investigación profunda y sistemática. Esta sistematización se obtiene a través de una metodología. (pp.37-38)

Una vez leído este contenido ¿Qué es para usted la investigación?

3.4 FUNCIONES CON VARIABLE REAL

Definición 3.9 Función es el conjunto de pares ordenados tales que las primeras componentes pertenecen al conjunto X y las segundas componentes pertenecen al conjunto Y. Simbólicamente se representa:

$$f : X \to Y$$
$$x \to y = f(x)$$

Dominio de una función de variable real

Definición 3.10: Sea f una función de variable real $f : x \to y$. El conjunto de los elementos x, constituyen el dominio de la función. Simbólicamente se representa ***dom f***

Para identificar el dominio de una función hay que tener presente:

- Si f(x) es un cociente, el dominio no existe cuando el denominador se hace cero; no se debe considerar los valores que afectan esta situación.

- Si f(x) contiene una raíz de índice par, el dominio existe si el radicando es positivo o cero.

Ejemplo 3.10: Identifique el dominio de $f(x) = 5x - 1$

Solución:

Claramente se observa que para todo elemento de x existe un elemento de y, es decir que el dom f = R.

Ejemplo 3.11: encuentre el dominio de $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-5}$

Solución:

El denominador es $x - 5 \neq 0$; $x \neq 5$, por lo que se concluye que el,

$$domf = R - \{5\} = (-\infty, 5) \cup (5, \infty)$$

Ejemplo 3.12: Encuentre el dominio de $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

Solución:

$x^2-1\geq 0$; $|x|\geq 1$, por lo tanto:

$$domf=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

Rango de una función de variable real

Definición 3.11. Sea $f:x\to y$, el conjunto de los elementos imagen del dominio, es el rango de la función. Simbólicamente se representa ***rgf***.

El proceso para obtener la imagen de una función *y = f(x)* es:

- Despejar algebraicamente la variable x en la función.
- El rango es el conjunto de valores que toma la variable y, una vez despejada la variable x.

Ejemplo 3.13: $f(x)=4x-5, \forall x\in R$

$y=4x-5$; $x=\dfrac{y+5}{4}$

Para todo valor de y existe un valor de x, por lo tanto el *rgf* = R

Ejemplo 3.14: $f(x)=\dfrac{x+2}{x}, \forall x\neq 0$

$y=f(x)=\dfrac{x+2}{x}$

$yx=x+2\to yx-x=2$

$x(y-1)=2$, despejando x,

$$x=\frac{2}{y-1}$$

El cociente está definido cuando $y-1\neq 0$; $y\neq 1$, por lo tanto, el, $rgf=R-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

Ejemplo 3.15: $f(x)=2x^2+3, \forall x\in R$

$$y=2x^2+3\rightarrow 2x^2=y-3\rightarrow x^2=\frac{y-3}{2}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{y-3}{2}}$$

$$y-3\geq 0; y\geq 3,$$

$$rgf=[3,+\infty)$$

3.4.1 TIPO DE FUNCIONES CON VARIABLE REAL

Atendiendo a su estructura son:

a. Función Constante

Definición 3.12 Una función es constante cuando $y=f(x)=b, \forall x\in R$

Ejemplo 3.16: $y=f(x)=10$, en otros términos $y=f(x)=0x+10$, es una función constante. Cualquiera que sea el valor de x, el rango tiene un solo valor de 10, se puede ampliar la explicación con las expresiones:

$$f(2)=10$$
$$f(-5)=10$$
$$f(500)=10$$
$$f(q)=10$$

En la figura 3.1 de puede apreciar para cada valor del dominio corresponde el mismo valor del rango.

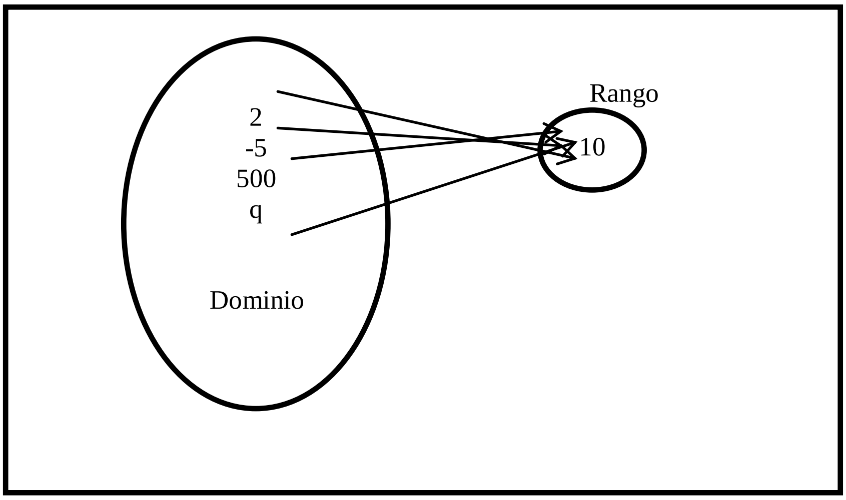


Figura 3.1

b. Función Identidad

Definición 3.13. Una función es idéntica cuando $f(x)=x, \forall x \in R$.

Donde el dominio e imagen o recorrido es el conjunto de los números reales, la pendiente de esta recta es 1 y pasa por el origen. Su gráfica es una recta con una inclinación de 45º o tg 45º. *Algunos autores señalan a este tipo de rectas como funciones lineales*. Se deriva la forma general:

$f(x)=ax$, donde **a** es una constante llamada **pendiente m.**

c. Función Lineal

Definición 3.14: Una función es lineal cuando $y=f(x)=mx+b$, donde m es la pendiente y b es la ordenada en el origen (0, b). Tanto m como b pertenecen a los números reales. *Algunos autores le llaman función no lineal con gráfico lineal.*

Ejemplo 3.17: $y=f(x)=5x+6$

Es una función lineal con m = 5 y la ordenada en el origen b = 6

PUNTO DE APOYO
En el ejemplo 3.9. C = f(x) = 0.4x + 50 000, es una aplicación de función lineal

d. Función Cuadrática

Definición 3.15: la forma general de la función cuadrática está dada por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c pertenecen al conjunto de los reales, siempre y cuando $a \neq 0$.

Ejemplo 3.18: $y = f(x) = 2x^2 - 7x - 15$ En esta función:

La gráfica de la función cuadrática es una parábola, cuya curva según los casos se extiende hacia arriba, hacia abajo, hacia la izquierda o hacia la derecha del plano cartesiano. (Más adelante se observará con mayor detenimiento).

Como aplicación de la función cuadrática en economía se tiene en la *demanda de un producto cuya cantidad varía según el precio de venta*. La función de la demanda se expresa $q_d = f(p)$

Ejemplo 3.19: $q_d = p^2 - 20p + 2400$,

Donde q_d es el número de unidades demandadas y p es el precio de dólares, considerando esta función, la cantidad de la demanda a un precio de USD2,00, es:

$$q_d = f(2) = 2^2 - 20(2) + 2400$$
$$= 4 - 40 + 2400 = 2364 \text{ Unidades}$$

A un precio de 10 dólares

$$q_d = f(10) = 10^2 - 20(10) + 2400$$
$$= 100 - 200 + 2400 = 2300 \text{ Unidades}$$

¿Qué pasaría si se vende al precio de USD15,00?

e. Funciones Cúbicas

Definición 3.16: una función es cúbica cuando $y = f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, donde a_3, a_2, a_1, a_0, pertenecen a los reales y $a_3 \neq 0$

Ejemplo 3.20: $y = f(x) = x^3 - 20x^2 + 12x - 100$

Es una función cúbica donde $a_3 = 1, a_2 = 20, a_1 = 12, a_0 = -100$

Las epidemias se propagan en nuestro país por la influencia del fenómeno El Niño. Por esta razón el personal de salubridad estima que el número de personas que contraerán es una función del tiempo transcurrido desde que descubrió la epidemia. La función es:

$$n = f(t) = 100t^3 - 5t^2$$

Donde n es el número de personas afectadas y $0 < t \leq 50$, evaluados en días contados a partir del descubrimiento de la epidemia. Surge la interrogante ¿cuàl es el número de personas afectadas en 10 días?

$$\begin{aligned} n = f(10) &= 100(10)^3 - 5(10)^2 \\ &= 100000 - 500 \\ &= 99500 \text{ Personas} \end{aligned}$$

f. Función Polinomial

Definición 3.17: La función polinomial está dada por la forma:

$$y = f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +, \ldots, a_1x + a_0$$

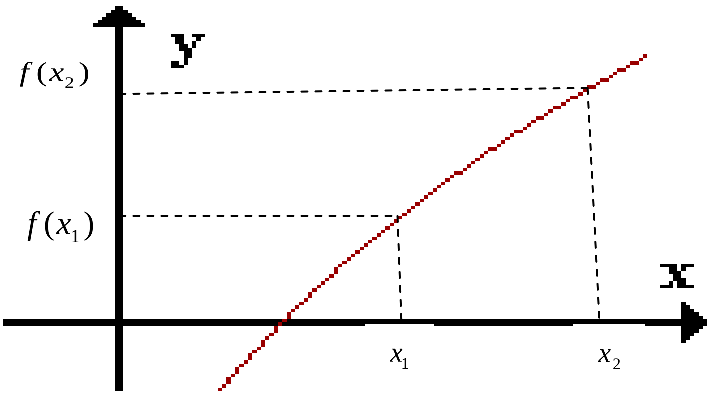
Donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R$ y $a_n \neq 0$. El exponente de x debe ser un entero no negativo y el grado del polinomio es el exponente más alto en la función. La función $y = f(x) = x^4$, es una función de grado 4.

g. Función Creciente

Definición 3.18: Una función f es creciente cuando $\forall x_1, x_2 \in I[(x_1 < x_2) \to (f(x_1 \le x_2))]$ y es **estrictamente creciente** cuando $\forall x_1, x_2 \in I[(x_1 < x_2) \to (f(x_1 < x_2))]$

Estas definiciones son muy útiles para estudiar el comportamiento de curvas cuando es motivo del estudio de derivadas.

Para mayor ilustración de las definiciones, se puede encontrar en la gráfica 3.1



Gráfica 3.1

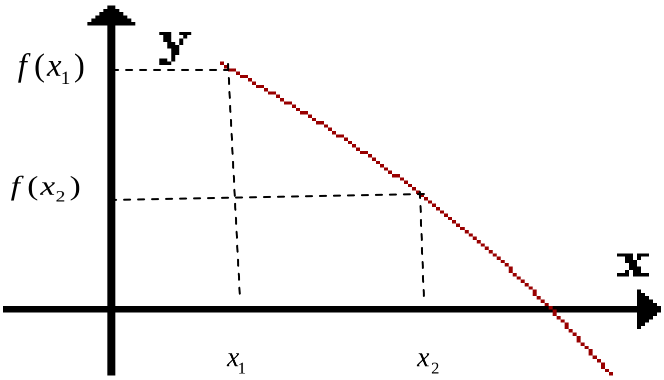
h. Función Decreciente

Definición 3.19: Una función f es decreciente cuando

$$\forall x_1, x_2 \in I[(x_1 < x_2) \to (f(x_1 \ge x_2))]$$

Y es **estrictamente decreciente** cuando $\forall x_1, x_2 \in I[(x_1 < x_2) \to (f(x_1 > x_2))]$

En la gráfica 3.2 se ilustra la variación decreciente



Gráfica 3.2

i. Funciones Racionales

Definición 3.20. Una función es racional cuando hay una relación entre dos funciones g(x) y h(x). La forma general es:

$$y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Ejemplo 3.21: La función $y = f(x) = \frac{5x}{x^2 - 1}$, es un ejemplo de función racional donde g(x) = 5x y h(x) = $x^2 - 1$

Las funciones racionales son utilizadas por los terapeutas para conocer el costo C de un programa de rehabilitación, está en función del porcentaje de recuperación lograda en el proceso.

La función $C = f(x) = \frac{8x}{60 - x}, 0 \leq x \leq 100$, donde C está dado en dólares. El costo de la terapia para tener una recuperación del 30%, es:

$$C = f(30) = \frac{8(30)}{60 - 30} = \frac{240}{30} = 8 \text{ Dólares}$$

j. Las funciones Exponenciales

Definición 3.21: Función exponencial es una expresión algebraica en donde la variable independiente es el exponente o parte del exponente.

Es de la forma $y = [f(x)]^x$

Son funciones exponenciales, $y = f(x) = 5^x$ $y = f(x) = 2e^x$, donde e =2.718283...

Muchas empresas adquieren maquinaria, vehículos, edificios y otros bienes de capital, los contadores llevan el valor en libros, mediante el fundamento:

Valor el libro = costo de compra – depreciación

Ejemplo 3.22: el valor en libros de un tractor, está dado por:

$$V = 12(1.5)^{-0.1t}$$

Donde, V es el valor en libros expresado en dólares y t el número de años desde la fecha de su compra. El valor al cabo de 3 años es:

$$V = 80000(1.5)^{-0.1(3)}$$

$$= 80000(1.5)^{-0.3}$$

$$= 80000\frac{1}{(1.5)^{0.3}}$$

$$= 80000\frac{1}{1.129346935}$$

$$= 80000(0.885467493) = 70837.40 \text{ Dólares}$$

k. Funciones Logarítmicas

Definición 3.22: Una función f es logarítmica si:

$$y = f(x) = \log_a x$$

Siendo a cualquier base. Si es de base a = 10, este subíndice no se considera, es decir:

$$y = f(x) = \log x$$

Las funciones logarítmicas tienen gran aplicación en la administración, economía e ingenierías.

l. Funciones Implícitas

Son aquellas en las que ninguna variable está despejada.

Ejemplo 3.23: Las expresiones siguientes son funciones implícitas

$$y - 5x = 3$$

$$y^2 + 5x - 3y + x^2 = 5$$

$$y^2 - 3xy + x^2 - 8 = 0$$

m. Funciones explícitas

Son aquellas igualdades donde se la variable se encuentra despejada.

Ejemplo 3.24: Son funciones explícitas:

$$y = f(x) = 5x + 3$$

$$y = f(x) = x^2 - 5x + 8$$

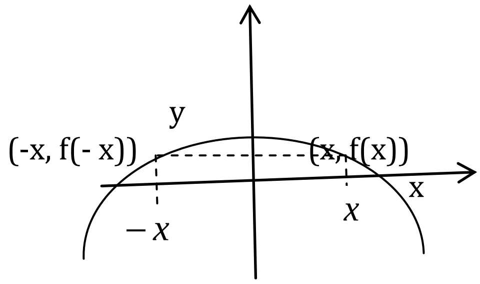
$$y = f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$$

n. Funciones Par o Impar

Definición 3.23: Una función f es par cuando

$$\forall x, -x \in dom f\left[f(-x) = f(x) \right]$$

En la gráfica 3.3 se ilustra esta función

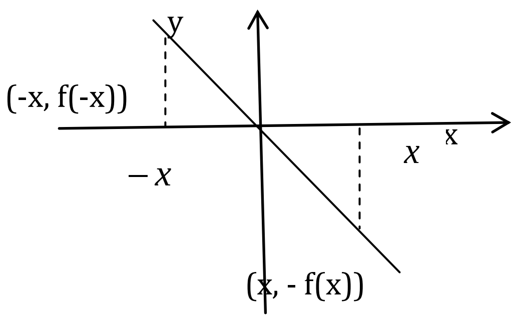


Gráfica 3.3 Función Par

Definición 3.24: Una función f es impar cuando,

$$\forall x, -x \in domf\left[f(-x) = -f(x)\right]$$

En la gráfica 3. 4, se ilustra esta función.



Gráfica 3.4 Función Impar

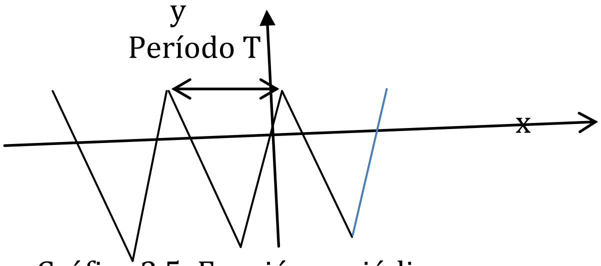
o. Funciones Periódicas

Definición 3.25: Una función f es periódica cuando cumple con la propiedad:

$$\exists T \in R^{+} \forall x \in domf\left[f(x+T) = f(x)\right]$$

Es periódica con periodo T.

En la gráfica 3,5, se ilustra esta función



Gráfica 3.5: Función periódica

p. Funciones especiales

Entre las funciones especiales se tiene: **Valor absoluto, signo, escalón, máximo entero mayor.**

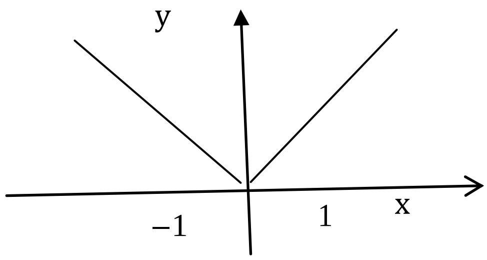
p.1 Función Valor Absoluto

Definición 3.26: una función f se denomina valor absoluto cuando

La relación se da R en $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$$x \to f(x) = |x|$$

La gráfica 3.6 demuestra la función



Gráfica 3.6: Función Valor Absoluto

La gráfica señala que el $domf = R$, el $rgf = [0,+\infty)$, es estrictamente decreciente en $(-\infty,0)$, es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$, la función es inyectiva, es par y continua en R.

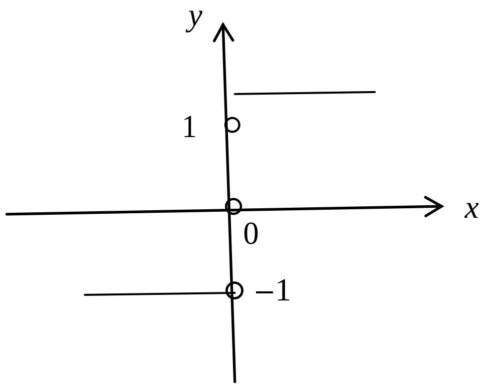
p.2 Función Signo

Definición 3.27: La función f se denomina signo cuando se verifica:

$R \to R$

$x \to f(x) = \mathrm{sgn}(x)$

$$f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & -x < 0 \end{cases}$$



Gráfica 3.7: Función Signo

En la gráfica 3.7 se observa que él $domf = R$, el $rgf = \{-1,0,1\}$, la función es creciente, impar, hay una discontinuidad en x = 0

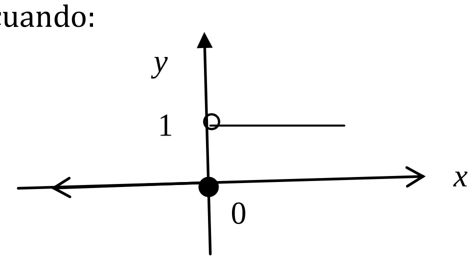
p.3 Función Escalón

Definición 3.28: una función es escalón, cuando:

$R \to R$

$x \to f(x) = \mu(x)$

$$f(x) = \mu(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$



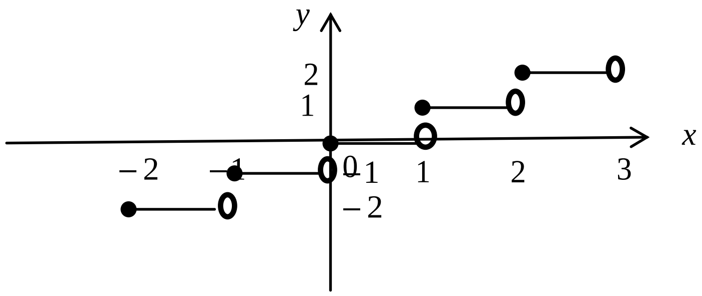
Gráfica 3.8: Función Escalón

Se observa que el $domf = R$, el $rgf = \{0,1\}$, la función es creciente en R, hay discontinuidad en x = 0

p.4 Función Entero Mayor

Definición 3.29: La función entero mayor cumple si:

$R \to R$
$x \to f(x) =$ [[x]]



Gráfica 3.9: Función Entero Mayor

$f(x) =$ [[x]] = n

$n \le x < n+1; x \in R \wedge n \in Z$

1

Ejemplo 3.25: Para un número real no entero, el entero mayor de:

3.1 = 3   - 2.3 = - 3
2.3 = 2   - 2.05 = - 3
π = 3

GUÍA DE ESTUDIO 16

Objetivo

Evidenciar conocimiento de las definiciones en los diferentes tipos de funciones para resolver problemas de la vida real y la forma de representar gráficamente.

Actividades

En forma individual o en equipo, analizar y discutir los temas relacionados a las funciones matemáticas, tratando de mantener el conocimiento para argumentar en los diferentes casos de problemas de aplicación.

Resuelva cada uno de los ejercicios

1. Identifique el tipo de función en los casos siguientes:
    a. $f(x)=15$
    b. $f(x)=2x-5$
    c. $f(x)=5x^2-3x-10$
    d. $f(x)=(0.8)^{0.75t}$
    e. $f(x)=7-2x$
    f. $f(x)=(x^3-1)(x-1)$
    g. $f(x)=x^3+2x^2-5x+4$
    h. $f(x)=\frac{3}{2}x+50$
    i. $f(u)=u^3$
    j. $f(v)=\log_2(v-3)$
    k. $f(x)=5x$
    l. $f(x)=\log 5x$
    m. $f(x)=\frac{2x-3}{x+2}$
    n. $f(x)=\mu(2x)$
    o. $f(x)=\operatorname{sgn}(2x+1)$
    p. $f(x)=|3x-2|$

2. La utilidad de plantar x_j hectáreas en la granja j se expresa en la función:

$$P(x_1, x_2, x_3) = 400x_1 + 550x_2 + 450x_3 - 525000$$

a. ¿Cuál es la utilidad total si en la granja 1 se plantan 200 Ha, en la ganja 2 se plantan 900 Ha y en la granja 3 se plantan 150 Ha?.

b. ¿Cuál es la utilidad total si en las tres granjas se plantan 500, 300 y 700 hectáreas respectivamente?

3. El valor en libros de una camioneta es la función:

$$V = f(t) = 5000 - 2500t$$

Donde V es el valor en libros en dólares y t es el tiempo de comprada la camioneta en años.

a. ¿Qué tipo de función es esta?
b. ¿Cuál es el valor en libros a los 4 años?
c. ¿Cuándo será igual a cero el valor en libros?

4. El ingreso total por la venta de un producto depende del precio por unidad. La función de ingreso es:

$$R = f(p) = 300p - 10p^2$$

Donde R es el ingreso total en dólares y p indica el precio

a. ¿Qué tipo de función es?
b. ¿Cuál es el ingreso total, si el precio es de USD 5,00?

5. Dadas las funciones implícitas, exprese explícitamente en *f(x)* y *g(y)* :

a. $3x - 4y - 35 = 0$
b. $x^2 + 3x - y^2 = 10$
c. $4y - 3x + y^2 - 3 = 0$
d. $2x^3 - 2y + 5 = 0$
e. $3x^4 - 3x^3 - 18x^2 - 3y = 0$
f. $\dfrac{x+3}{2} - \dfrac{y-4}{3} = 5$
g. $2x\left(\dfrac{x-y}{2-x}\right) = 2$

Facetas

EL PROCESO DEL CONOCIMIENTO

González et al. (1996) afirman que: El acto científico de conocer, es un proceso que se desarrolla de acuerdo a una ley (del conocimiento), se vale de un método (de investigación). La Ley del conocimiento y el método para conocer, guardan una relación biunívoca, se relacionan mutuamente.

El objetivo de esta faceta es hacer explícita esta interrelación.

El problema básico que tiene el acto de conocer es establecer implantar la relación entre:

Lo singular y lo general

Lo sensorial y lo racional, y

Lo inmediato y lo mediato

Conocer es, una consecuencia y según Rosental el proceso de elevación:

De lo singular a lo general

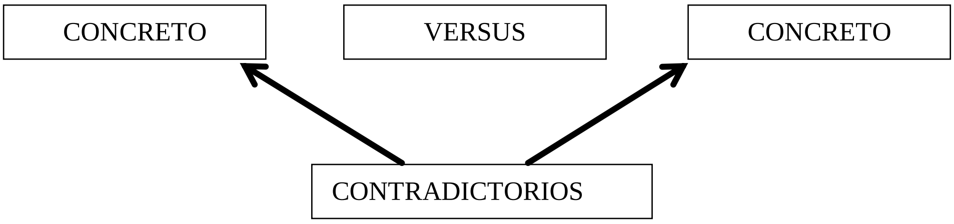
Del fenómeno a la LEY.

El problema radica en que lo singular es contradictorio (dialécticamente hablando) de lo general, de la misma manera entre el fenómeno, en tanto y en cuanto tal, es contradictorio a la Ley.

Expresado, en otros términos, entre lo singular y lo general, entre el fenómeno y la ley, no hay un nexo directo, sino una distancia influida por relaciones antagónicas.

¿Cuál es la relación entre abstracto y concreto?

Es básico despejar esta incógnita, porque la única posibilidad de conocer el mundo objetivo, es la que pasa por la abstracción, (sin abstracción no hay posibilidad de conocer). Es más, la realidad "caótica" en su manifestación externa (apariencia), sólo al pasar por el nivel de la abstracción permite descubrir sus leyes, ecuaciones, conceptos, puede ser captada como verdaderamente es la realidad lógica, unitaria, interconectada y correlacionada dentro del sistema universal "causa – efecto", del cual nada de lo existente escapa y ese es el ***único camino posible del conocimiento científico.***



Pues, abstraer es alejarse (tomar distancia de la realidad) de la realidad concreta, mientras que, por lo contrario:

¿Qué es entonces, concreto y qué es abstracción?

Concreto

Cuando se habla de "concreto", se hace referencia a la integridad de algo, en el conjunto de sus propiedades y manifestaciones, o sea se refiere **al todo existente como parte integrante de la diversidad.**

En esta diversidad todos los elementos **se encuentran encadenados y condicionados recíprocamente, por la totalidad de las relaciones "causa – efecto"**. Esta totalidad constituye el *SISTEMA DE NEXOS Y RELACIONES* de ese "concreto".

Abstracto

Cuando se refiere al concepto "abstracto", se hace referencia a parcialidades parte (o "partes") del todo, desconectados de los nexos, abstracto es contrario a concreto: abstraer es separación artificial de partes para su estudio y comprensión. ***LA PARTE ES TAN REAL COMO EL TODO***. (pp.39-43)

Realice su comentario sobre el proceso del conocimiento de los temas y contenidos en las diferentes asignaturas de formación profesional.

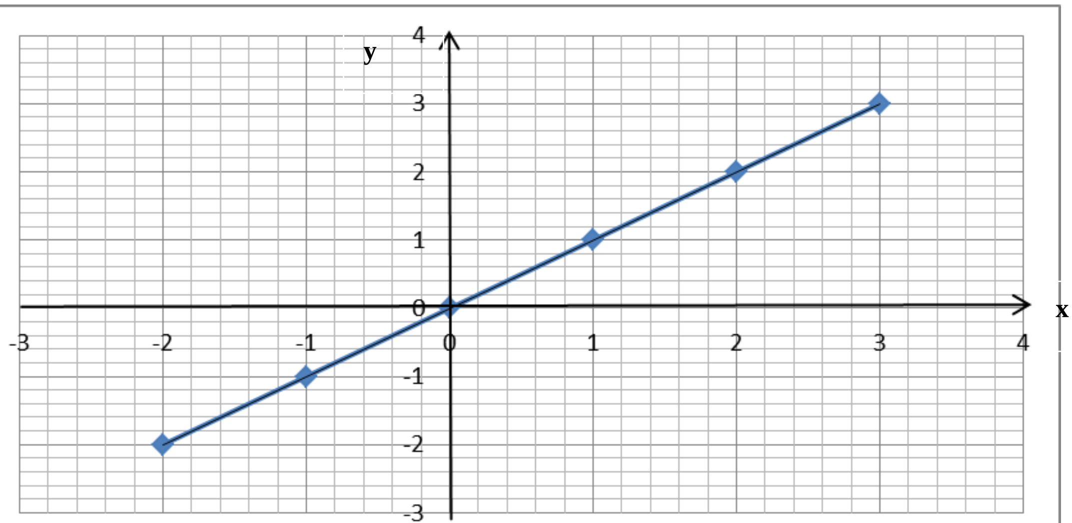
3.4.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES

La representación gráfica de funciones se apoya en el sistema de coordenadas rectangulares X e Y, donde $x \subset R$ e $y \subset R$.

El punto de intersección con los ejes se denomina origen. El par ordenado (a, b) es un punto en el plano cartesiano, donde a se llama abscisa y b ordenada.

3.4.1.1. Función Idéntica

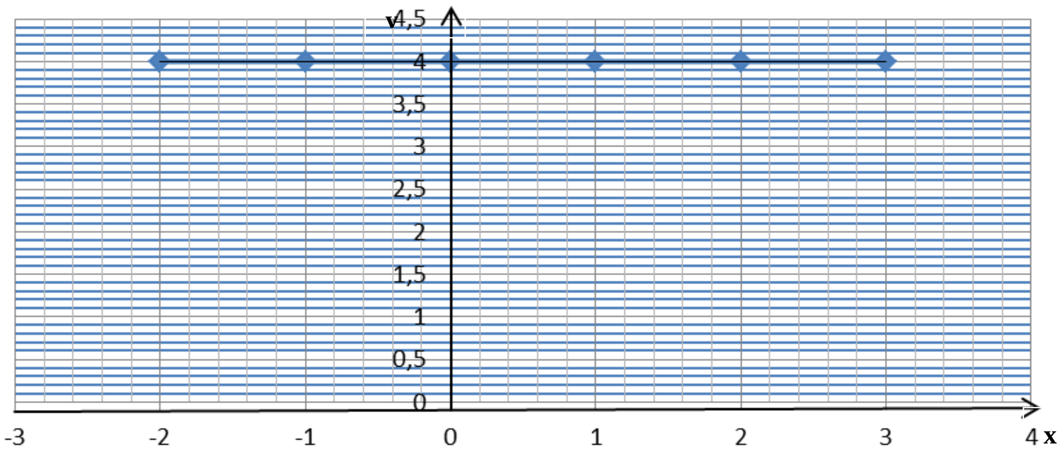
$$f(x) = x \Leftrightarrow R = \{(-2,-2),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$$



Gràfica 3.10: Funciòn Identica

3.4.1.2. Función constante

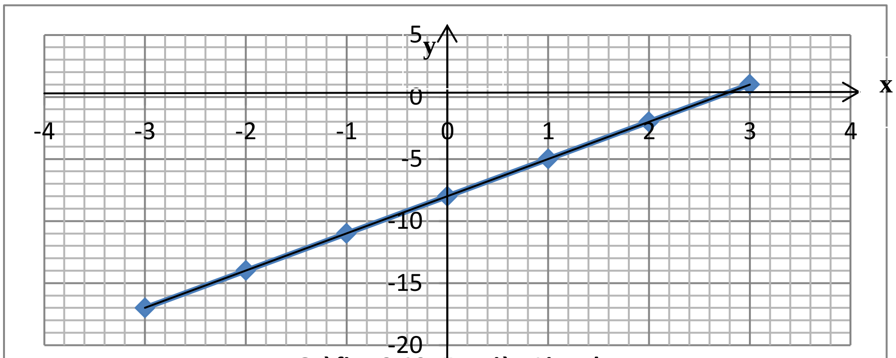
$$f(x) = 5 \Leftrightarrow R = \{(-2,4),(-1,4),(0,4),(1,4),(2,4),(3,4)\}$$



Gràfica 3.11: Funciòn Constante

3.4.1.3 Función lineal

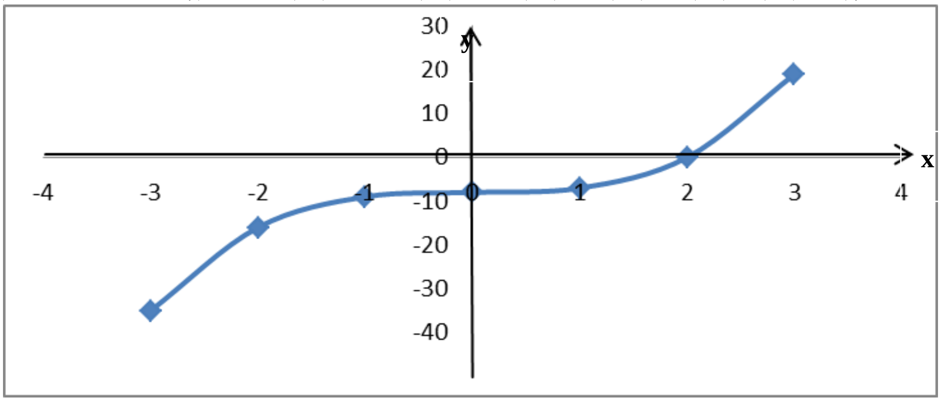
$$f(x)=3x-8 \Leftrightarrow R=\{(-3,-17),(-2,-14),(-1,-11),(0,-8),(1,-5),(2,-2),(3,1)\}$$



Gràfica 3.12: Funciòn Lineal

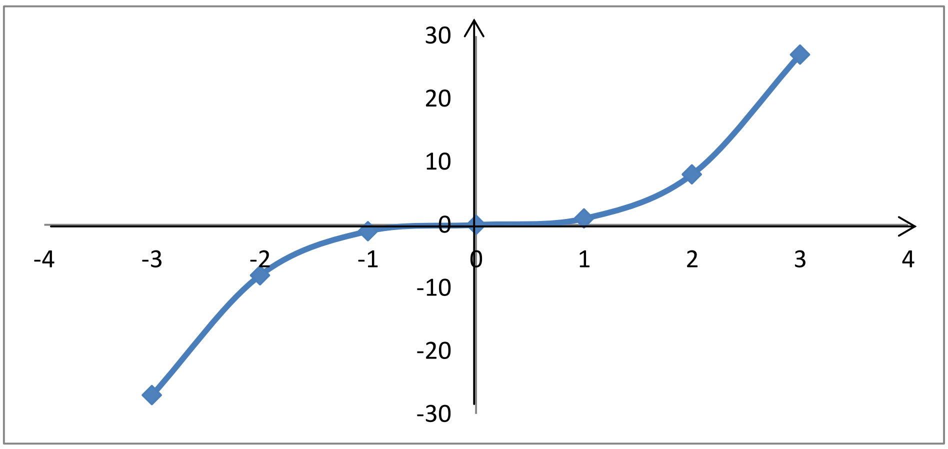
3.4.1.4 Función cúbica

a) $f(x)=x^3-8; R=\{(-3,-35),(-2,-16),(-1,-9),(0,-8),(1,-7),(2,0),(3,19)\}$



Gráfica 3.13: función Cúbica con desplazamiento hacia abajo

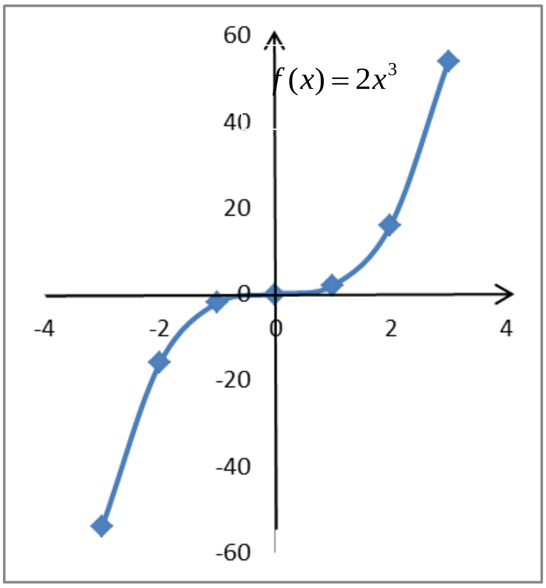
b) $f(x)=x^3;\ R=\{(-3,-27),(-2,-8),(-1,-1),(1,1),(2,8),(3,27)\}$



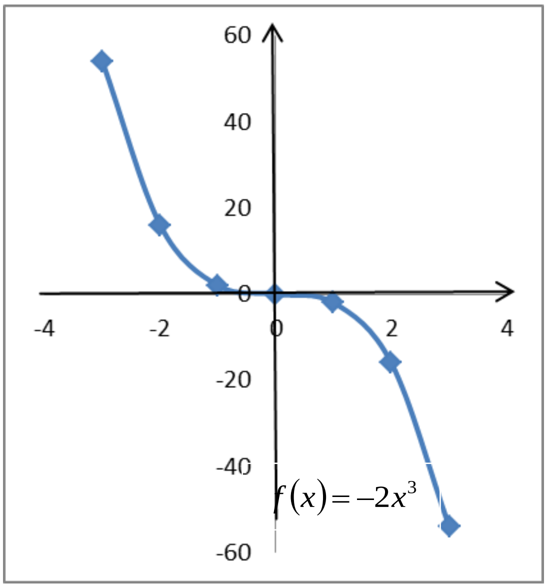
Gráfica 3.14: Función Cúbica

c. $f(x)=2x^3;\ R=\{(-3,-54),(-2,-16),(-1,-2),(1,2),(2,16),(3,54)\}$

$f(x) = -2x^3$: $R = \{(-3,54),(-2,16),(-1,2),(1,-2),(2,-16),(3,-54)\}$



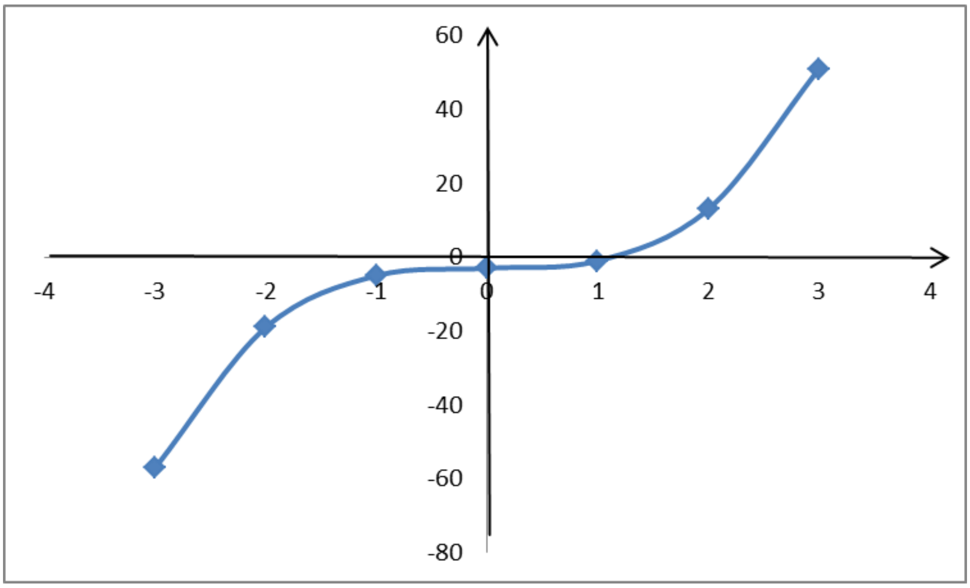
Gráfica 3.15: Función Cúbica



Gráfica 3.16: Función Cúbica

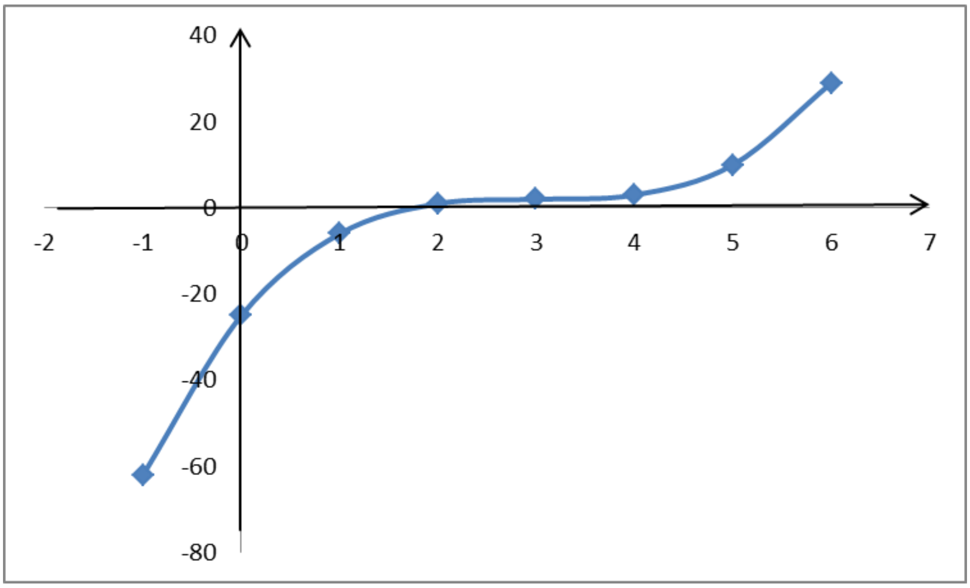
Características: inyectiva, sobreyectiva, impar, con alargamientos o compresiones verticales. La gráfica 3.27 es reflexiva

d. $f(x) = 2x^3 - 3$; $R = \{(-3,-57),(-2,-19),(-1,-5),(0,-3),(1,-1),(2,13),(2,51)\}$



Gráfica 3.17: Función Cúbica con desplazamiento hacia abajo y alargamiento vertical

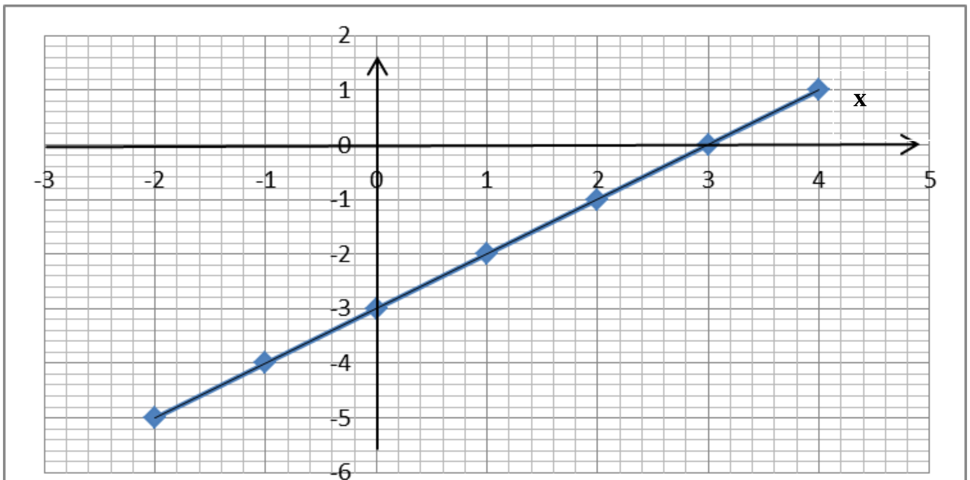
e. $f(x)=(x-3)^3+2$; $R=\{(-1,-62),(0,-25),(1,-6),(2,1),(3,2),(4,3),(5,10),(6,29)\}$



Gráfica 3.18: Función Cubica con desplazamiento hacia la derecha

3.4.1.5 Función racional

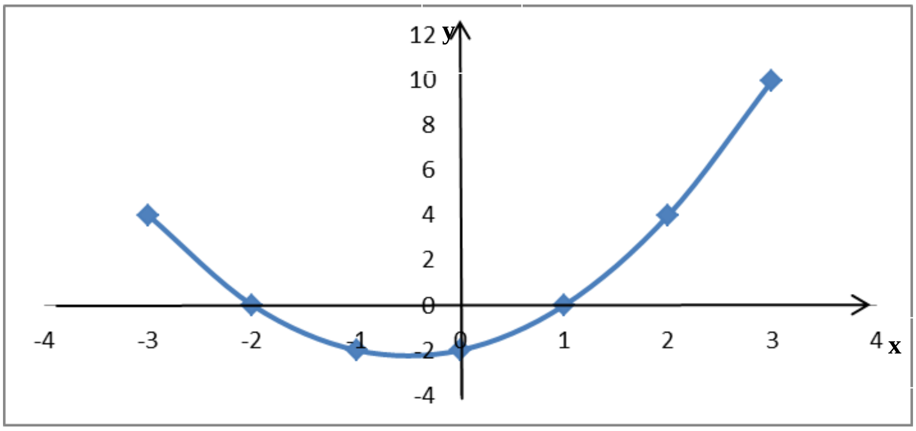
$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}=x-3; x\neq -3$, puesto que cuando x = - 3, el valor de f(x) es un valor infinito; $R=\{(-2,-5)(-1,-4),(0,-3),(1,-2),(2,-1),(3,0),(4,1)\}$



Gràfica 3.19: Funciòn Racional

3.4.1.6 Función cuadrática

$f(x) = x^2 + x - 2; R = \{(-3,4)(-2,0),(0,-2),(1,0),(2,4),(3,10)\}$



Gráfica 3.20: Función Cuadrática

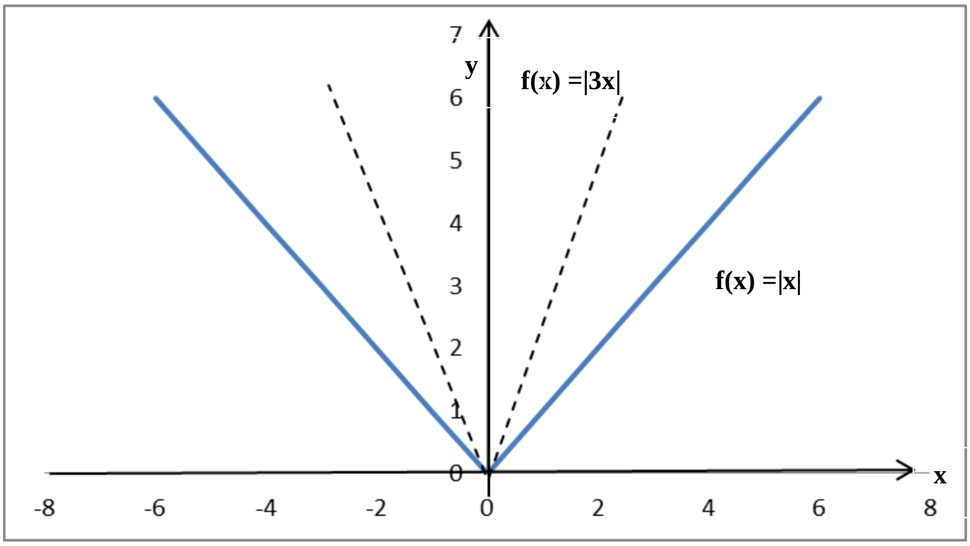
3.4.1.7 Funciones Especiales

Caso 1: Valor Absoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

a. $f(x) = |x|; R = \{(-3,3),(-2,2),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$

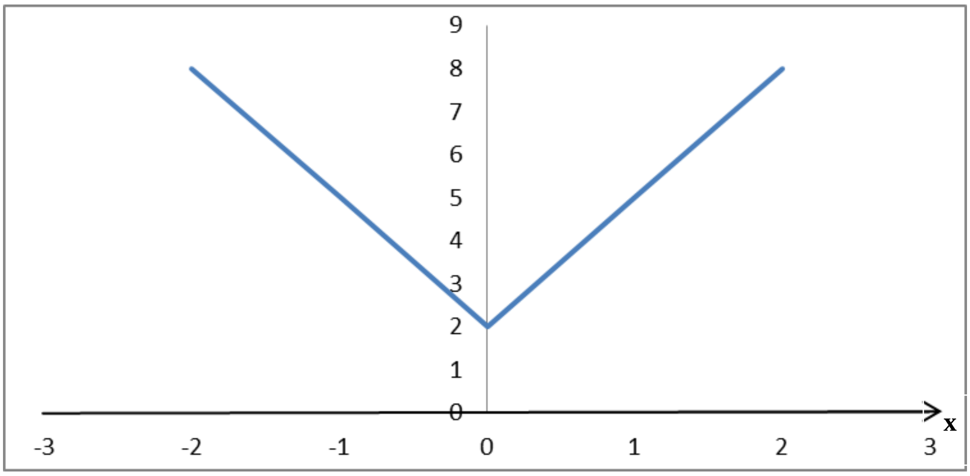
b. $f(x) = |3x|; R = \{(-3,9),(-2,6),(-1,3),(0,0),(1,3),(2,6),(3,9)\}$



Gráfica 3.21: Función Valor Absoluto

Existe una compresión o alargamiento vertical sobre el eje y

c. Graficar la función $f(x)=|3x|+2$; $R=\{(-2,8),(-1,5),(0,2),(1,5),(2,8)\}$

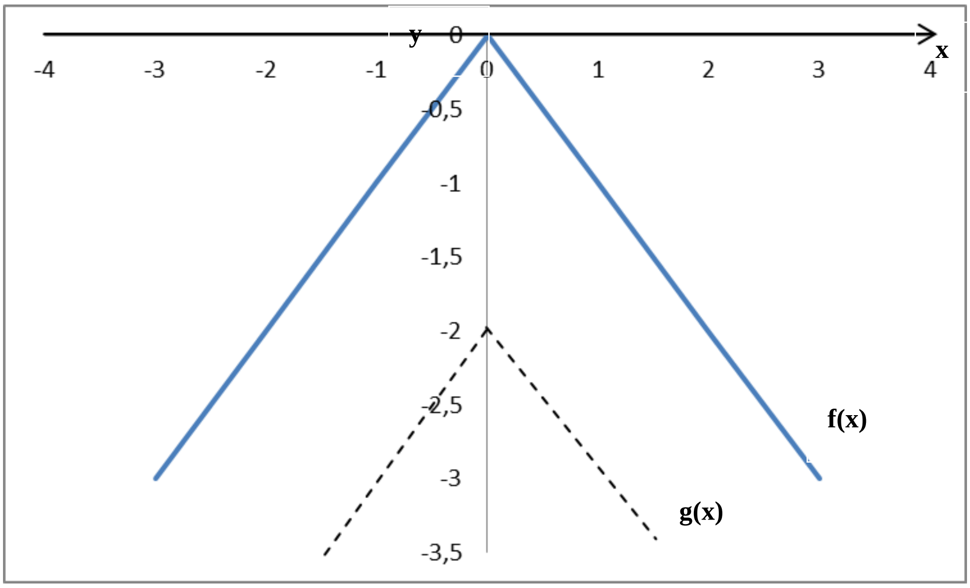


Gráfica 3.22: Función Valor Absoluto con desplazamiento hacia arriba

d. Graficar las funciones:

1) $f(x)=-|x|$; $R=\{(-3,-3)(-2,-2),(-1,-1),(0,0),(1,-1),(2,-2),(3,-3)\}$, y

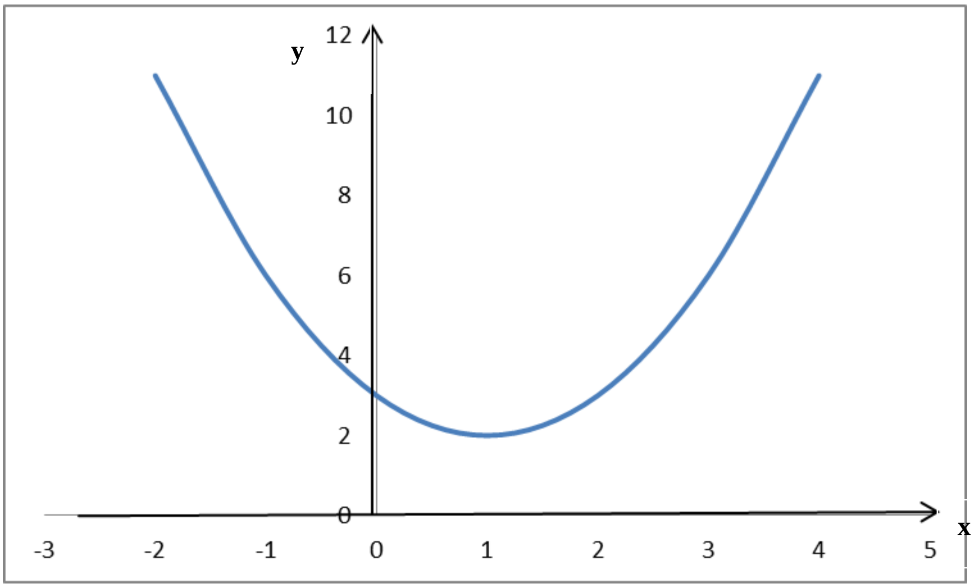
2) $g(x)=-|x|-2$; $R=\{(-2,-4),(-1,-3),(0,-2),(1,-3),(2,-4)\}$



Gráfica 3.23: Función Valor Absoluto con reflexión y desplazamiento hacia abajo

e. Graficar la función:

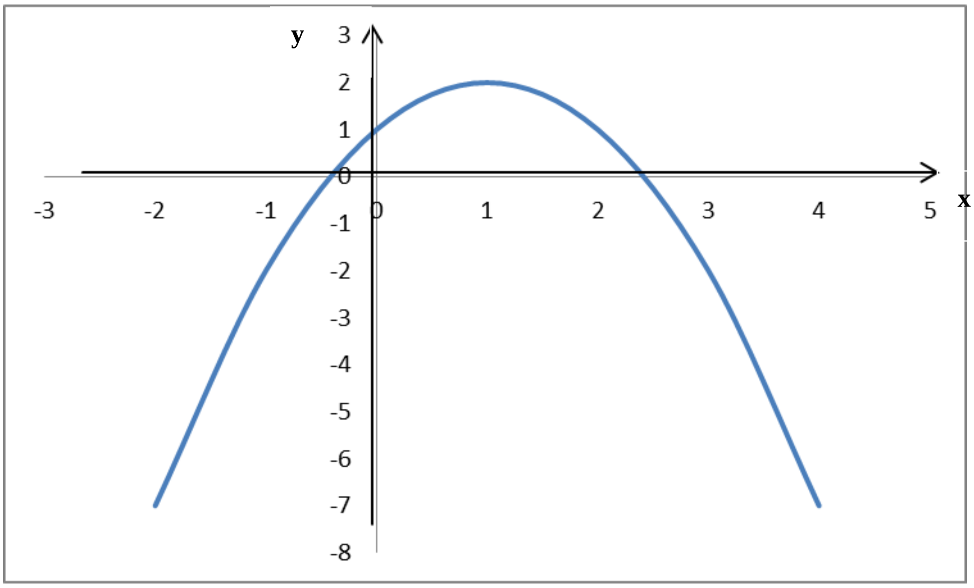
$$f(x)=\left|(x-1)^2\right|+2;\ R=\{(-2,11),(-1,6),(0,3),(1,2),(2,3),(3,6)\}$$



Gráfica 3.24: Función Valor Absoluto con desplazamiento hacia la derecha y hacia arriba

f. Graficar la función $f(x)=-\left|(x-1)^2\right|+2$;

$$R=\{(-2,-7),(-1,-2),(0,1),(1,2),(2,1),(3,-2),(4,-3)\}$$

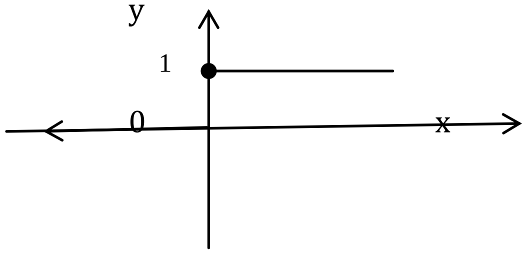


Gráfica 3.25: Función Valor Absoluto con reflexión

Caso 2: Función Escalón Unitaria

Definición

$$f(x)=U(x)=\begin{cases}1 & si \quad x\geq 0\\ 0 & si \quad x<0\end{cases}$$

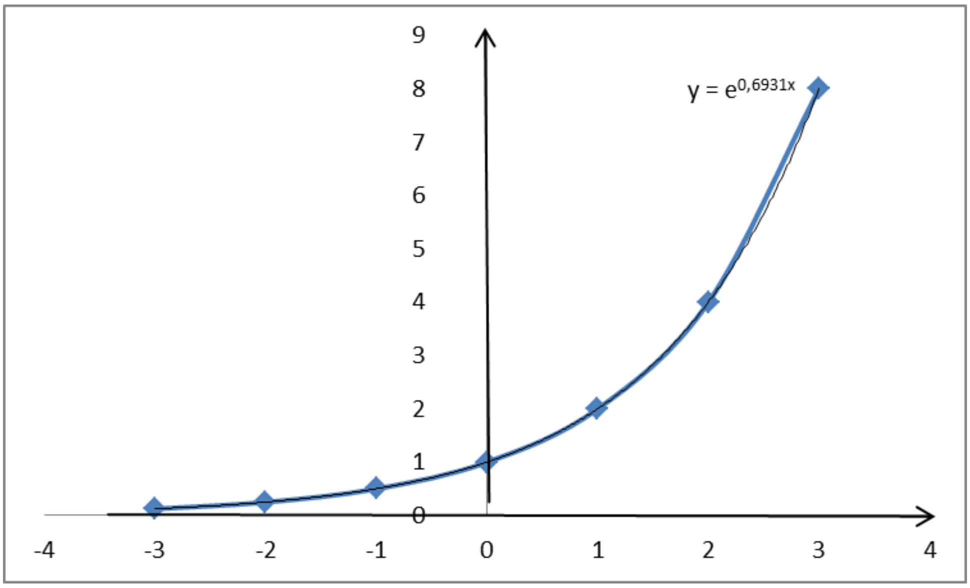


Gráfica 3.26: Función Escalón Unitaria

3.4.1.8 Función Exponencial

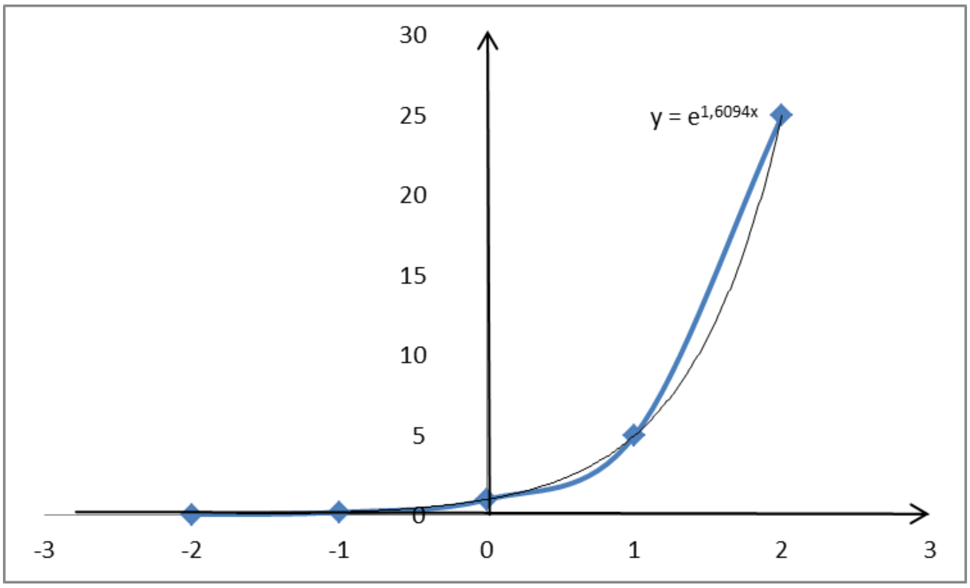
a. Graficar la función:

$$f(x)=2^x\ ;\ R=\left\{\left(-3,\frac{1}{8}\right),\left(-2,\frac{1}{4}\right),\left(-1,\frac{1}{2}\right),(0,1),(1,2),(2,4),(3,8)\right\}$$



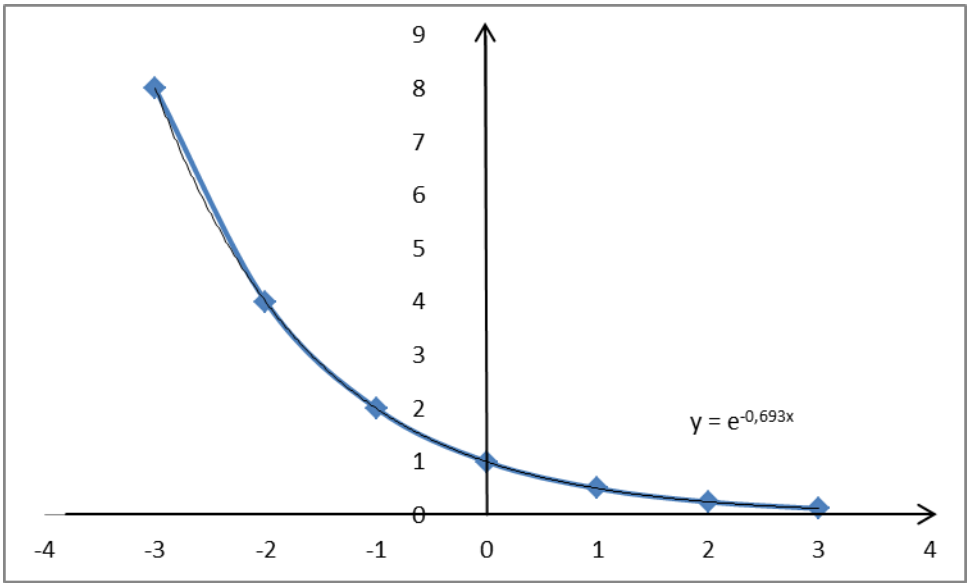
Grafica 3.27: Función Exponencial con línea de tendencia $y=e^{0.6931x}$

b. $f(x)=5^{x};R=\left\{\left(-2,\frac{1}{25}\right),\left(-1,\frac{1}{5}\right),(0,1),(1,5),(2,25)\right\}$



Gráfica 3.28: Función exponencial con línea de tendencia $y=e^{1,6094x}$

c. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x};R=\left\{(-3,8),(-2,4),(-1,2),(0,1),\left(1,\frac{1}{2}\right),\left(2,\frac{1}{4}\right),\left(3,\frac{1}{8}\right)\right\}$

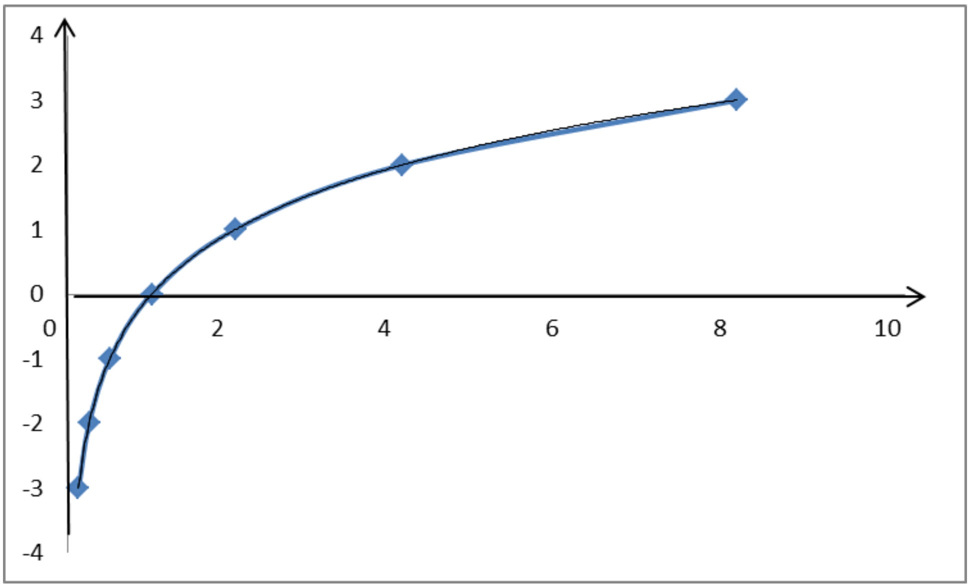


;

Gráfica 3.29: Función Exponencial con línea de tendencia $y=e^{-0.693x}$

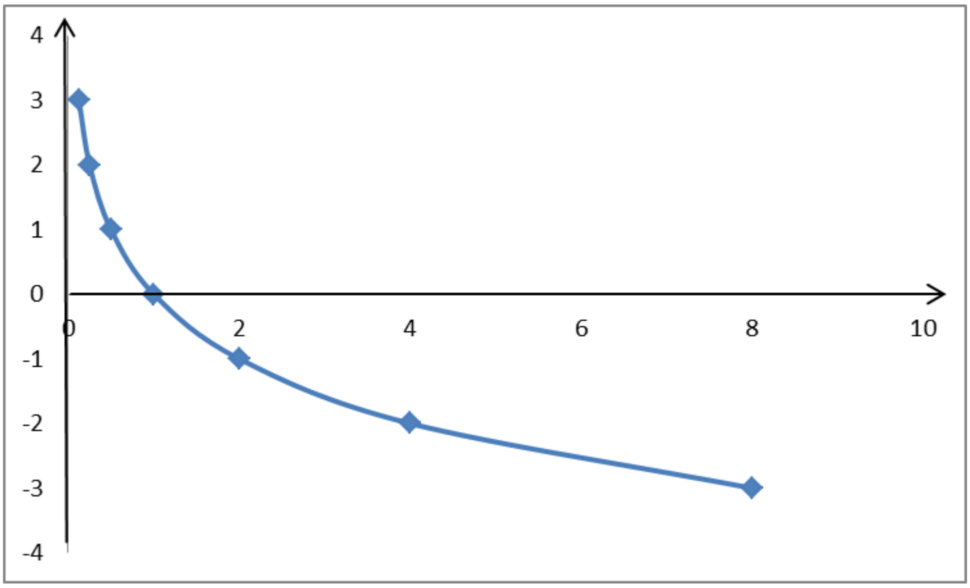
3.4.1.9 Función logarítmica

a. $f(x)=\log_2 x$; $R=\left\{\left(\frac{1}{8},-3\right),\left(\frac{1}{4},-2\right),\left(\frac{1}{2},-1\right),(1,0),(2,1),(8,3)\right\}$



Gráfica 3.30: Función Logarítmica de base 2

b. $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ $R=\left\{(8,-3),(4,-2),(2,-1),(1,0),\left(\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{1}{4},2\right),\left(\frac{1}{8},3\right)\right\}$

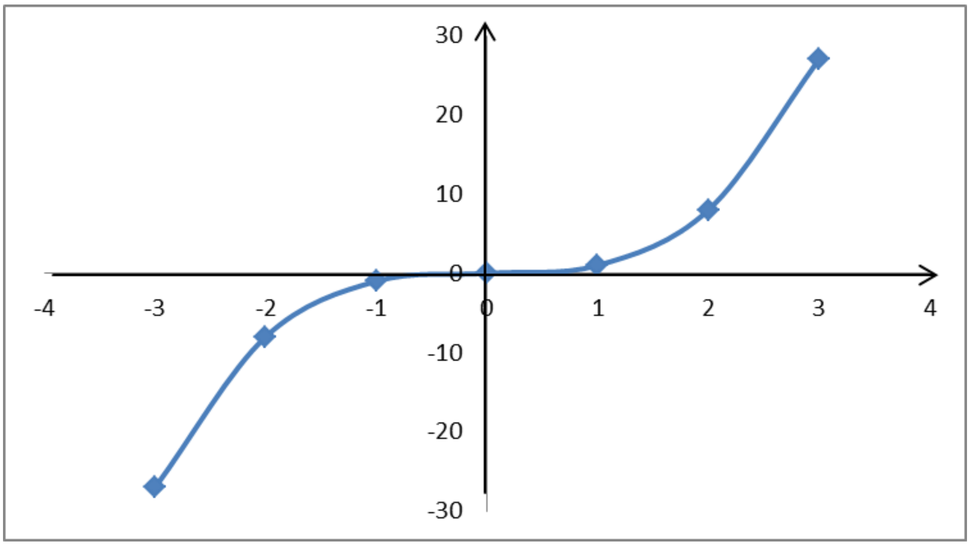


Grafica 3.31: Función Logarítmica de base 1/2

3.4.1.10 Función Cúbica

Caso 1:

$f(x)=x^3$; $R=\{(-3,-27),(-2,-8),(-1,-1),(1,1),(2,8),(3,27)\}$

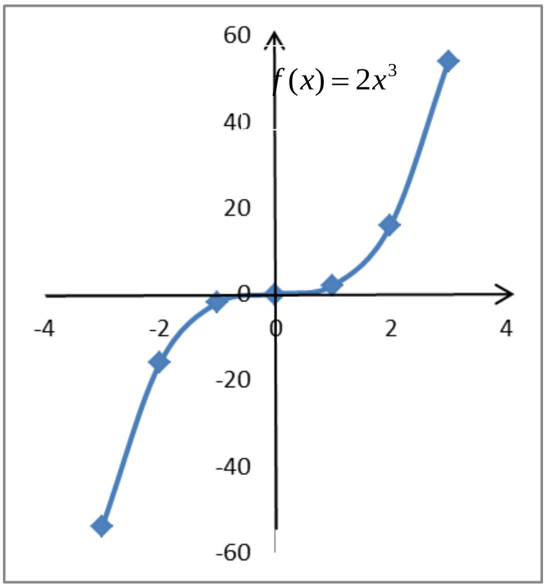


Gráfica 3.32: Función Cubica

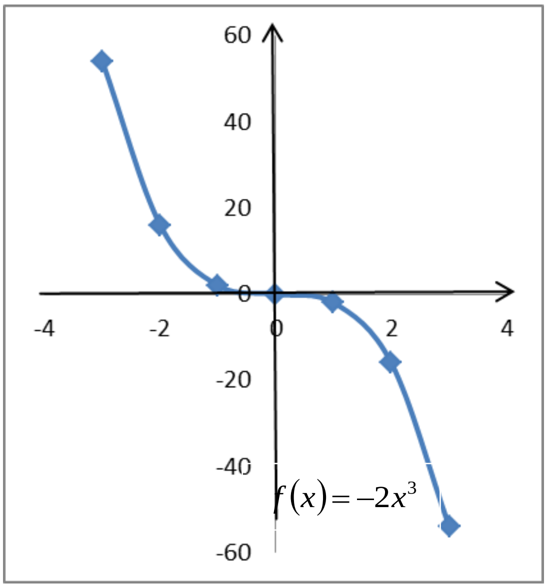
Caso 2:

$f(x)=2x^3$; $R=\{(-3,-54),(-2,-16),(-1,-2),(1,2),(2,16),(3,54)\}$

$f(x)=-2x^3$: $R=\{(-3,54),(-2,16),(-1,2),(1,-2),(2,-16),(3,-54)\}$



Gráfica 3.33: Función Cubica

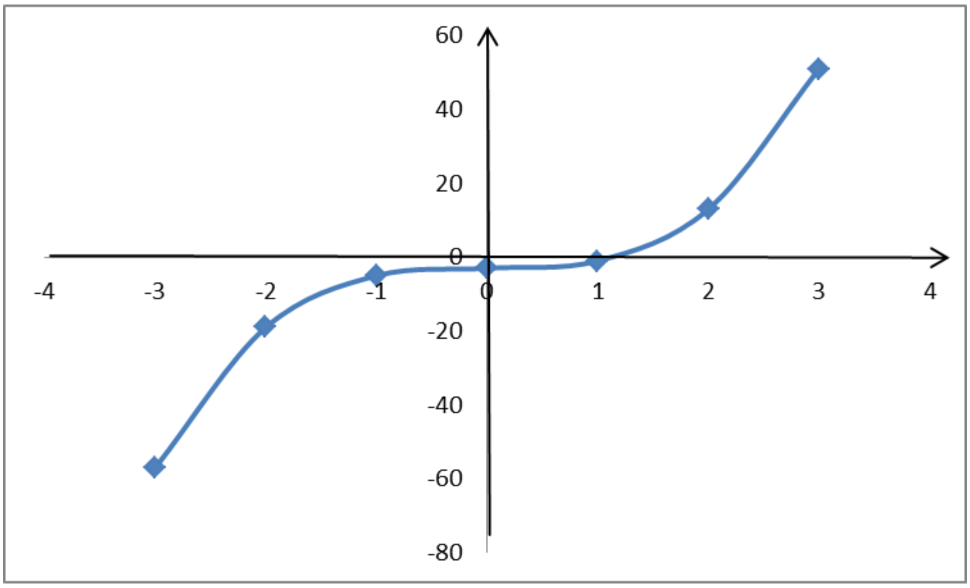


Gráfica 3.34: Función Cubica

Características: inyectiva, sobreyectiva, impar, con alargamientos o compresiones verticales. La gráfica 3.27 es reflexiva

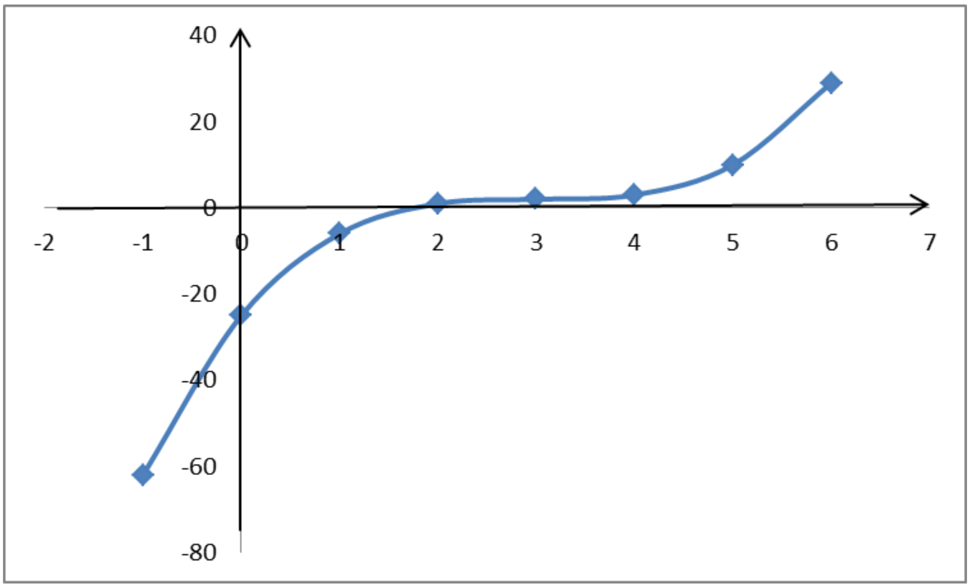
Caso 3:

$f(x)=2x^3-3$; $R=\{(-3,-57),(-2,-19),(-1,-5),(0,-3),(1,-1),(2,13),(2,51)\}$



Gráfica 3.35: Función Cúbica con desplazamiento hacia abajo y alargamiento vertical

Caso 4: $f(x)=(x-3)^3+2$; $R=\{(-1,-62),(0,-25),(1,-6),(2,1),(3,2),(4,3),(5,10),(6,29)\}$



Gráfica 3.36: Función Cúbica con desplazamiento hacia la derecha

GUÍA DE ESTUDIO 17

Objetivo

Mantener el conocimiento teórico mediante la representación gráfica de funciones matemáticas.

Actividades

El estudiante debe realizar en forma individual o en equipo de tres estudiantes, durante el tiempo de trabajo autónomo, las representaciones gráficas de las funciones matemáticas y la aplicación de conceptos.

En los ejercicios siguientes, grafique y determine el tipo de función.

1. $f(x)=10$
2. $f(x)=-8$
3. $f(x)=2x-5$
4. $f(x)=-4x-1$
5. $f(x)=4x^2+5x$
6. $f(x)=2x^2-3x-7$
7. $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x-3}$
8. $f(x)=x^3-2x^2-x$
9. $f(x)=x^2-3x-10$
10. $f(x)=-(x^2+3x-10)$
11. $f(x)=3x$
12. $f(x)=-5x$
13. $f(x)=x^2-64$
14. $f(x)=2-3x^2$
15. $f(x)=(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$
16. $f(x)=|4x|$
17. $f(x)=|x+2|-5$

18. $f(x) = -|2x - 1| + 3$

19. $f(x) = -(x+5)^2 - 4$

20. $f(x) = (3x-5)^3 + 7$

21. $f(x) = \log_3 x$

22. $f(x) = 5^x$

23. $f(x) = -\log_2 2x$

24. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} 2x$

25. $f(x) = |x^2| - 3$

26. $f(x) = |(x+3)^2| - 6$

Para cada una de las siguientes funciones, encuentre a) $f(5)$, b) $f\left(\frac{a}{b}\right)$, c) $f(-x)$, d) $f(2b)$, e) $f(5x-1)$, f) $f(a^2-1)$, g) $f(x-h)$

27. $f(x) = 7$

28. $f(x) = -9 - 5x$

29. $f(x) = (2x-5)^2$

30. $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

31. $f(x) = 3^x$

32. $f(x) = (3-4x)^x$

33. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

34. $f(x) = 2x^{0.2x}$

Facetas

Lea y comente sobre:

FUNCIONES DE LA INVESTIGACIÓN

González S. et al (1996) exponen que: una de las funciones de la investigación social y educativa es desarrollar y evaluar prácticas, conceptos y teorías de las relaciones sociales, así como desarrollar y evaluar metodologías que sometan a prueba estas prácticas, conceptos y teorías, en otras palabras conocer los límites del propio conocimiento y mantener en lucha constante contra ellos.

Ahora bien, la investigación puede ser completamente práctica en su función, el deseo puede consistir en conocer, con objeto de ser capaz de hacer algo mejor o más eficientemente. (p.65)

Unidad 4

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES, MATRICES Y DETERMINANTES

Contenidos

Objetivos

- Mantener conocimiento sobre pendiente y formas de la recta.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales para la aplicación en problemas sociales, económicos y financieros.
- Definir en concepto de vectores y encontrar las aplicaciones en diversos problemas de la realidad.
- Resolver operaciones de matrices en sus diferentes manifestaciones utilizando métodos adecuados y eficaces.
- Calcular la determinante de una matriz utilizando varios métodos

Historia

Ecuaciones lineales

- Período 1700 a.c – 1700 d.c: invención de símbolos y resolución de ecuaciones, en esta etapa los griegos (año 300 a. c) se desarrolla el álgebra geométrica.
- Vite (1540 – 1603) introduce la notación simbólica y Descartes (1596 – 1650) contribuye en esta notación.
- Euler (1707 – 1783): teoría de los cálculos de los números racionales enteros, fracciones ordinarias, raíces cuadradas y cubicas, progresiones y resolución general de ecuaciones.
- Habrían de pasar 3000 años para aplicar el procedimiento de la resolución de la ecuación $ax + b = c$.
- Los egipcios (1650 a.c), dejaron en papiros gran cantidad de problemas resueltos, en su mayoría problemas aritméticas de la vida diaria. Las ecuaciones utilizadas fueron de la forma: $x + bx = b$ y $x + ax + bx = 0$; a, b y c eran números conocidos y x la incógnita llamada <u>aha o montón.</u>

De los sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones fueron resueltos por los babilónicos. Un ejemplo extraído de una tabla dice en los términos siguientes:

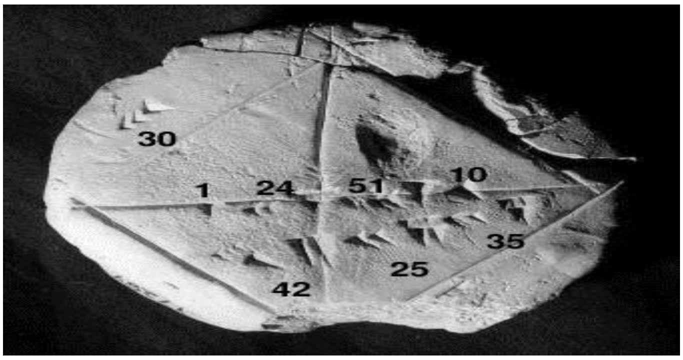
¼ de la anchura + longitud = 7 manos

Longitud + anchura = 10 manos

Para resolver comienzan una mano = 5 y la solución podría ser anchura = 20 y longitud = 30. En la actualidad el método es de eliminación.

Los griegos resolvieron utilizando métodos geométricos. Thymaridas podría haber encontrado una fórmula para resolver n ecuaciones con n incógnitas.

Recuperado de http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/14/historia.html



Tablilla de los babilonios
Fuente: franciciscojaviertostado.com

4.1 APROXIMACIÓN

El concepto línea, geométricamente tiene muchas definiciones, entre las que se mencionan las siguientes:

- Es una recta infinita de puntos
- Es el límite de una superficie

En matemáticas la palabra "lineal" tiene un amplio significado, según GROSSMAN, S (1992) "es una generalización de las propiedades de las líneas rectas".

Pendiente de una recta

A la pendiente se representada con la letra **m**

La pendiente que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha \qquad \text{si } x_1 \neq x_2$$

Es necesario considerar sobre la pendiente, las condiciones siguientes:

- Condición de paralelismo: $m_1 = m_2$
- Condición de perpendicularidad: $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$

- La pendiente de las rectas paralelas al eje x es cero.

- La pendiente de las rectas paralelas al eje y no está definida, tiende al infinito.

Formas de la ecuación de la recta:

- y = mx +b, conocida con el nombre de pendiente m y ordenada en el origen b
- Ax + By + C =0; forma general de la recta, donde $m = -\frac{A}{B}$ y la ordenada en el origen es $b = -\frac{C}{B}$
- $y - y_1 = m(x - x_1)$; punto – pendiente
- $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; forma simétrica, abscisa en el origen (a,0) y ordenada en el origen (0,b).
- $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$; forma cartesiana, cuando se conocen dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$
- $x\cos\omega + ysen\omega - p = 0$; forma normal de la recta

Para encontrar la ecuación de la recta aplicando las formas enunciadas, se recomienda tomar en cuenta las instrucciones siguientes:

a. Construir un sistema de coordenadas rectangulares.

b. Graficar los puntos que da el problema.

c. Identificar la forma de la recta, según los datos del problema.

d. Realizar las operaciones aritméticas o algebraicas.

e. Encontrar la ecuación.

f. Análisis de resultados.

4.2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

4.2.1 Generalización

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Donde $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2) \in$ a los racionales, Q

Ejemplo 4.1:

Sistema con solución única

$$\begin{cases} x + y = 8 \quad (1) \\ x - y = 2 \quad (2) \end{cases}$$

Al sumar las dos ecuaciones se obtiene 2x = 10, dividiendo entre 2 la igualdad, x = 5. Sustituyendo en la ecuación (2), 5 – y = 2; transponiendo términos, y = 3. por lo tanto, el conjunto solución es (5,3), al sustituir los valores encontrados en el sistema de ecuaciones se verifica las igualdades. Por lo cual es sistema tiene solución única o simultánea.

Sistema con un número infinito de soluciones

Ejemplo 4. 2:

Dado el sistema

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

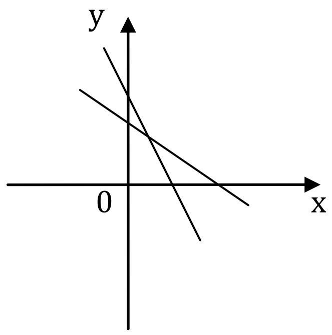
Las dos ecuaciones son equivalentes, con el fin de comprobar, divídase por 2 la segunda. De la ecuación x + y = 5, transponiendo x al segundo miembro, y = 5 – x, la solución es el par (x, 5 – x), para todo número real de x. Dicho de otra forma, el sistema tiene un número infinito de soluciones. Los pares siguientes son soluciones: (2,3), (4,1), (5,0), (6,-1), (10, -5)

Ejemplo 4.3:

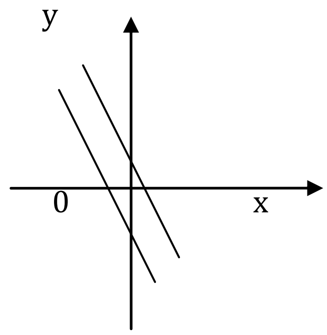
Sistema sin solución

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 9 \end{cases}$$

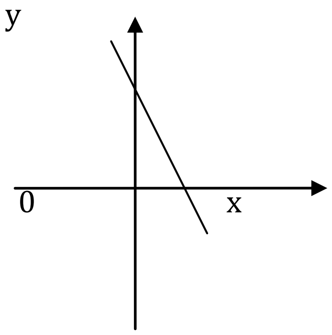
Multiplicando por 2 la primera ecuación se obtiene 2x + 2y = 10, contradiciendo a la segunda ecuación. Entonces el sistema no tiene solución, el gráfico de las dos ecuaciones serán rectas paralelas. Encontrando la pendiente en las dos ecuaciones, su valor es el mismo, es decir m = – 1



Gráfica 4.1: Rectas no paralelas; un punto de intersección



Gráfica 4.2: Rectas paralelas; ningún punto de intersección



Gráfica 4.3: Las rectas son coincidentes; el número de puntos de intersección es infinito.

4.2.2 Propiedades del sistema de ecuaciones con dos incógnitas

- Si se multiplica o se divide un número cualquiera a una ecuación del sistema, el sistema no altera.
- Si la primera ecuación se multiplica por un número cualquiera a todos los términos, y este producto se suma a la segunda ecuación, el sistema no altera.

- Si la primera ecuación se divide por un número cualquiera a todos los términos, y este cociente se suma a la segunda ecuación, el sistema no altera.
- Si se cambia de signo a todos los términos de una ecuación el sistema no altera.

Aplicando estas propiedades en el sistema de ecuaciones, se obtendrá un número indeterminado de sistemas de ecuaciones equivalentes.

Ejemplo 4.4:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$$

- A todos los términos de la primera ecuación se por 5, el sistema es:

$$\begin{cases} 10x - 25y = 10 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$$

- Multiplicando por 5 a todos los términos de la segunda ecuación, se tiene:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ 15x - 5y = -5 \end{cases}$$

- Si se multiplica a todos los términos de la primera ecuación por 2, y este producto se suma a la segunda ecuación, se obtiene:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$$

Multiplicando por 2; se obtiene $4x - 10y = 4$, este resultado se suma término a término a la segunda, resulta $7x - 11y = 3$

$$\begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ 7x - 11y = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto, los sistemas anotados son **equivalentes.**

4.2.3 MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Para resolver un sistema de ecuaciones existen los métodos siguientes:

a. Igualación
b. Sustitución
c. Reducción
d. Gráfico
e. Determinantes
f. Eliminación de Gauss – Jordán
g. Eliminación Gaussiana

De los diferentes métodos de resolución, se va a considerar el ejemplo 5, para resolver por el método de igualación, determinantes, eliminación de Gauss – Jordán y eliminación Gaussiana.

Ejemplo 4.5:

Dado el sistema:

$2x - y = 6$

$x - 3y = -2$

Método de igualación

Despejando x de la primera y la segunda ecuación

$x = \dfrac{6+y}{2}$; $x = 3y - 2$; por lo tanto x = x, igualando los segundos miembros, se tiene:

$\frac{6+y}{2} = 3y - 2$; destruyendo denominadores, (o M.C.M)

6 + y = 6y – 4

-5y = - 10 ; dividiendo entre 2 la igualdad y cambiando de signo

y = 2   este valor sustituyendo en x = 3y – 2

x = 3(2) – 2 = 4, por la tanto el conjunto **solución es (4,2)**

Método de determinantes

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Es necesario obtener las fórmulas para encontrar los valores de x e y aplicando determinantes del sistema enunciado en forma general.

$$x = \frac{\begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}} = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}; \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta$$

$$y = \frac{\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}}{\Delta} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{\Delta}$$

Resolviendo el sistema, aplicando las fórmulas anteriores, se tiene

$$x=\frac{\begin{pmatrix}6 & -1\\ -2 & -3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2-1\\ 1-3\end{pmatrix}}=\frac{-.18-2}{-6+1}=\frac{-20}{-5}=4$$

$$y=\frac{\begin{pmatrix}26\\ 1-2\end{pmatrix}}{\Delta}=\frac{-4-6}{-5}=\frac{-10}{-5}=2$$

Conjunto solución (4,2)

Eliminación de Gauss – Jordán

2x –y = 6
x – 3y = - 2

Cambiando de línea las ecuaciones, por la facilidad que presta el coeficiente 1 de la segunda ecuación para la eliminación de términos de la otra ecuación, se tiene:

x – 3y = - 2 ; multiplicando por -2 los términos de la primera ecuación y sumando a la 2da
2x –y = 6

x – 3y = - 2
0 + 5y = 10; dividiendo por 5

x – 3y = - 2
0 + y = 2; multiplicando por 3 esta línea, y sumando a la primera, se tiene
x + 0 = 4
Por lo tanto, el conjunto solución es (4,2), se ratifica la solución por este método

Eliminación Gaussiana

Consiste en eliminar los coeficientes de una forma parecida al método anterior, en este caso se va a utilizar la matriz aumentada.

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 6 \end{array}\right|$$ Multiplicando por – 2 la primera fila, y este producto sumando a la 2^{da}

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 10 \end{array}\right|$$ Dividiendo por 5, la segunda fila

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right|$$ Esto quiere decir que y = 2; sustituyendo en la primera fila, es decir a la primera ecuación, se obtiene x = 4, por lo tanto la **solución es (4,2)**

GUÍA DE ESTUDIO 18

OBJETIVO

Evidenciar aprendizajes sobre la recta, con aplicaciones de la pendiente, sistemas ecuaciones con dos incógnitas y métodos de resolución.

ACTIVIDADES

En equipo de tres estudiantes, resolver los ejercicios que se detallan a continuación

1. Dados los puntos A(3,5), B(5,1), C(- 3, - 2), D(4, -5), encuentre la pendiente de la recta que pasan por los puntos: AB, AC, AB, BC, BD, CD.
2. Identifique el valor de la pendiente y la ordenada en el origen, en las ecuaciones siguientes:

a. $y = 5x - 7$

b. $y = bx + c$

c. $\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}y = 4$

d. $\frac{7}{4}x + \frac{3}{2}y - 5 = 0$

e. $7x - \frac{1}{4}y + 4 = 0$

f. $3x - 2y = 5$

g. $5y - 2x = -3$

h. $3 + 2x = 3y$

i. $5 + 3y = 4x$

3. Encuentre la ecuación de la recta, según los datos entregados en cada literal.

a. La recta pasa por los puntos A(1,-3) y B(3,5)

b. La recta que tiene de pendiente m = -5, y pasa por el punto B(-4, -5)

c. La recta que pasa por los puntos A(0, - 4) y B(5,0)

d. La recta que pasa por el punto (0,-5) y tiene de pendiente - 8

4. Dadas las ecuaciones de las rectas, encuentre la pendiente y la ordenada en el origen en cada uno de los casos:

a. $3x - 2y = 4$
b. $5y - 4x = -5$
c. $3 + 5y = 3x$
d. $5y = 3x + 7$
e. $\frac{3}{4}x + 4y = 5$
f. $\frac{1}{4} + 5x = \frac{3}{2}y$
g. $mx + ny - p = 0$
h. $\frac{3}{7} = 4y - \frac{3}{2}x$
i. $\frac{1}{8}y = 5x + 7$

5. En los sistemas siguientes identifique los sistemas con solución única, infinito número se soluciones y sin solución.

a. $2x - y = 6$
$x - 3y = -2$
b $2x - 5y = -4$
$2x - 5y = 2$
b. $4x + 3y = 7$
$8x + 6y = 14$
c. $2x - y = 5$
$x - 2y = 3$
d. $3x - 5y = 2$
$9x - 15y = 6$
d. $4x - 5y = -8$
$8x - 10y = 2$

6. Dado el sistema ecuaciones: Construya 5 sistemas equivalentes

7x + 2y = - 3

2x – 3y = 5

7. En los sistemas de ecuaciones que a continuación se ilustran, encuentre la solución aplicando los métodos de determinantes, eliminación de Gauss – Jordán, y eliminación Gaussiana.

a. 3x – 4y = 2

   2x + 5y = - 1

b. x +2y = - 3

   2x + y = 3

c. 3x + 5y = - 3

   3x + 2y = 0

d. -3x + 2y = - 1

   5y – 3x = - 3

e. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y = -3 \\ 3x - \frac{2}{3}y = 2 \end{cases}$

f. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = -3 \\ \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = 2 \end{cases}$

4.3 VECTORES

4.3.1 Referencias históricas

El matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), inició el estudio de los vectores, al representar ciertos objetos en el plano y en el espacio, descubriendo los ***cuaterniones***; concepto original que dio origen al desarrollo de los vectores. Durante este siglo se debatió mucho sobre los cuaterniones y los vectores.

El físico británico Lord Kelvin en sus escritos afirma que los cuaterniones; “no obstante ser bellamente ingeniosos, han sido un mal para todos aquellos que los han manejado de cualquier manera [y] los vectores nunca han tenido la menor utilidad para ninguna criatura”

(Reflexión y crítica)

> Punto de apoyo:
> Llamaremos cuaternión o simplemente hipercomplejos de Hamilton a una expresión de la forma: Q = a + b i + c j + d k

4.3.2 Vector fila de n-componentes

Definición 4.3.1: Se define como un conjunto ordenado de n números de la forma $(x_1, x_2, ...x_n)$

Vector columna de n-componentes

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

$x_1, x_2, ...x_n$, se denomina componentes de un vector

Vector cero, se denomina cualquier vector con cero componentes.

Ejemplo 4.6:

a. (3,6)

b. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c. (3,-1,0,4)

d. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Los vectores se pueden aplicar en las actividades de la vida diaria. Por ejemplo el dueño de una tienda de abarrotes ordena un pedido a uno de sus proveedores 24 unidades de salsa de tomate Los Andes 390g, 12 unidades de salsa Inglesa Gustadita de 170g, , 15 unidades de salsa china de soya Oriental de 260g. 30 unidades de mostaza Gaggi 240g, las cantidades señaladas se pueden ordenar en un solo vector. El vector $\begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix}$ indica el orden establecido del pedido al proveedor.

Los vectores tienen componentes reales o complejas.

Es necesario considerar los siguientes símbolos:

R = conjunto de los reales
C = conjunto de los números complejos
R^n = conjunto de los n – vectores

$$C^n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$$ Donde a_1, es un número real, también se puede señalar:

$$C^n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$$ Representa n- vectores, siendo c_1 un número complejo.

4.3.3 Igualdad de vectores

Definición 4.3.2: Dos vectores columna o fila son iguales si y solo si tienen el mismo número de componentes y sus componentes correspondientes son iguales.

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ son iguales si y solo si $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ... $a_n = b_n$

4.3.4 Adición de vectores

4.3.4.1 Propiedades de la suma de vectores

Conmutativa: Dados dos vectores del plano a y b, a + b = b + a.

Asociativa: Dados tres vectores a y b y c del plano, (a + b) + c = a + (b + c).

Elemento neutro: Dado a, un vector cualquiera del plano, a + 0 = 0 + a = a.

Es decir, el vector 0 es el elemento *neutro* de la operación suma de vectores libres del plano.

Definición 4.3.3: Sean los vectores $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ n- vectores, entonces la suma es:

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.7: Sumar los vectores

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4.3.5 Suma y resta gráfica de vectores

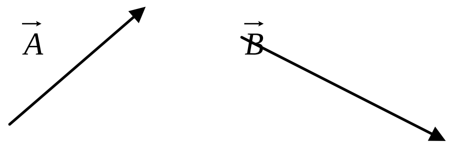
Para la gráfica de vectores se utilizan los siguientes métodos:

a. **Método de triángulo**

Partiendo del fin o sentido del vector $\vec{A}$, se dibuja el vector $\vec{B}$ con su igual tamaño y dirección, el vector que parte del origen de $\vec{A}$ y completa el triángulo, es el vector resultante: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

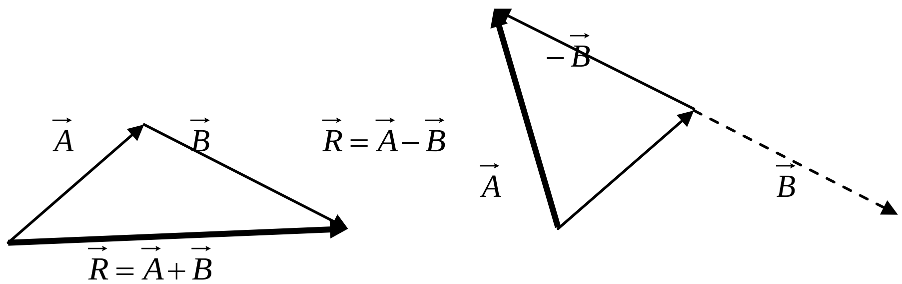
Para la resta se suma el vector $\vec{A}$ con el negativo del vector $\vec{B}$, esto quiere decir que a continuación del vector $\vec{A}$, traza el vector $\vec{B}$ con el sentido contrario, se cierra el triángulo partiendo del origen de $\vec{A}$ con el sentido del negativo de $\vec{B}$

Ejemplo 4.8: Dados los vectores, encuentre la resultante de $\vec{A}+\vec{B}$



Solución:

:

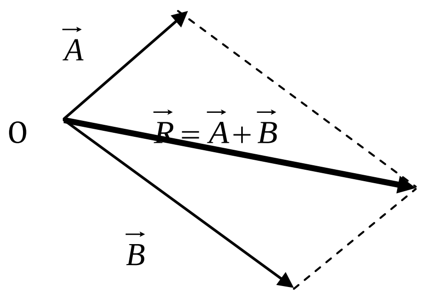


Gráfica 4.4: Suma y resta de vectores por el triángulo

b. Método del paralelogramo

Partiendo del mismo origen (O) se dibujan los vectores con su misma dirección y sentido, luego se construye un paralelogramo con las paralelas de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El vector diagonal que parte el origen O, es la suma o resultante $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}$

Ejemplo 4.9: Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, aplicando el método del paralelogramo, encuentre la resultante $\vec{R}$.

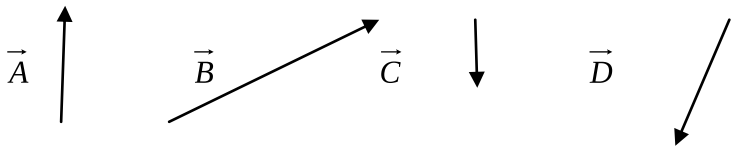


Gráfica 4.5: Suma de vectores por el método del paralelogramo

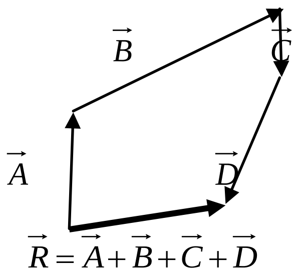
c. Método del polígono

La suma de vectores por el método del polígono consiste en ubicar uno a continuación de otro manteniendo el mismo tamaño, dirección y sentido, de manera que el vector que cierra el polígono partiendo del origen del primer vector con el sentido del último vector es el vector $\vec{R}$

Ejemplo 4.10: Encuentre el vector resultante dados los siguientes vectores



Solución:



Gráfica 4.6: Suma de vectores por el método del paralelogramo

4.3.6 Escalares

Escalares son magnitudes que se describen con un **valor** y una **unidad**.

4.3.6.1 Multiplicación de un escalar por un vector.

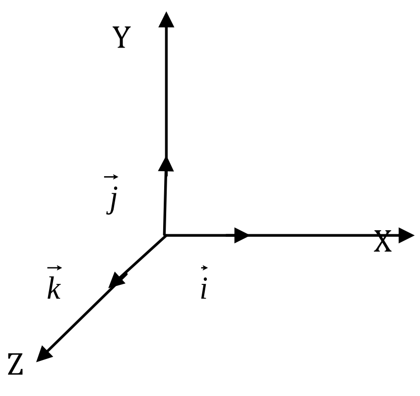
Definición 4.3.4: Sea $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$ un vector y α un escalar, el producto es: α

$$a = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$ como se observa la multiplicación de un escalar por un vector es el

producto del escalar por cada uno de las componentes del vector.

4.3.7 Vectores unitarios

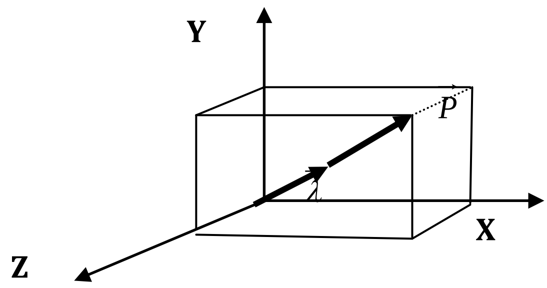
Definición 4.3.5: Son vectores tamaño unitario, tienen dirección y sentido de los ejes (X, Y, Z) en el sistema de coordenadas, están representados por $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$



$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$
$\vec{i}$ = (1,0,0); $\vec{j}$ =(0,1,0); $\vec{k}$ =(0,0,1)

Grafica 4.7: Vectores Unitarios

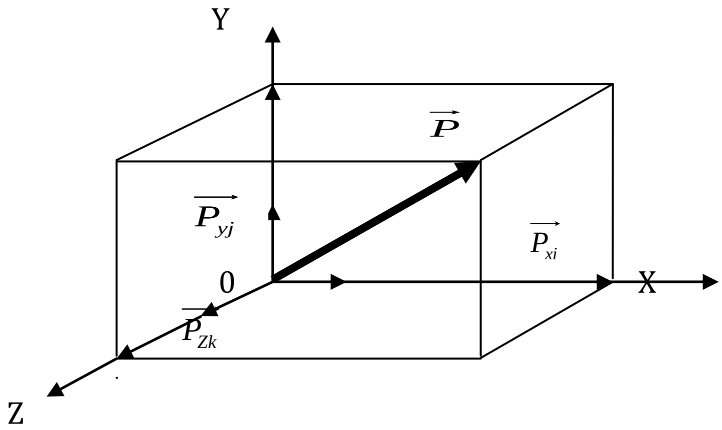
4.3.7.1 Vector unitario ($\vec{\lambda}$) de un vector $\vec{P}$



Gráfica 4.8: Vector unitario $\vec{\lambda}$

$$\vec{\lambda} = \cos\theta_x \vec{i} + \cos\theta_y \vec{j} + \cos\theta_z \vec{k}$$

4.3.8 Componentes rectangulares de un vector

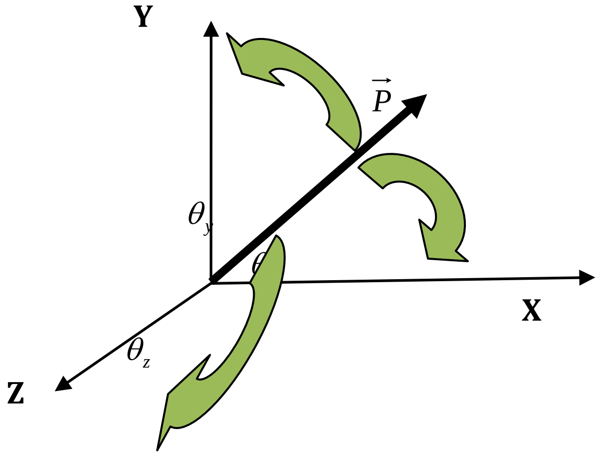


$$\vec{P} = \vec{P_x} + \vec{P_y} + \vec{P_z}$$

Grafica 4.9: Componentes rectangulares del vector P

$|\vec{P}| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$; Tamaño del vector

Cosenos directores



Gráfica 4.10: Cosenos directores

$$\cos\theta_x = \frac{P_x}{P} \Rightarrow P_x = P\cos\theta_x \Rightarrow \theta_x = \arccos\frac{P_x}{P}$$

$$\cos\theta_y = \frac{P_y}{P} \Rightarrow P_y = P\cos\theta_y \Rightarrow \theta_y = \arccos\frac{P_y}{P}$$

$$\cos\theta_z = \frac{P_z}{P} \Rightarrow P_z = P\cos\theta_z \Rightarrow \theta_z = \arccos\frac{P_z}{P}$$

4.3.9 Producto escalar o producto punto de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, dados en forma trinomia

Dados los vectores $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$; $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

El producto escalar es: $\vec{u} \bullet \vec{v} = u_x.v_x + u_y.v_y + u_z v_z$

Ejemplo 4.11: Dados $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{z}$, $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{z}$. Calcular $\vec{u} \bullet \vec{v}$

Solución:

$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_x.v_x + u_y.v_y + u_z v_z$ = (3).(4) + (- 2).(5) + (-4).(3) = 12 – 10 – 12 = - 10

4.3.10 Producto escalar de dos vectores

Definición 4.3.6: El producto punto $\vec{u} \bullet \vec{v}$ es equivalente al producto del tamaño de los vectores multiplicado por el coseno del ángulo que lo forman.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\theta = \text{Escalar}$$

El producto escalar de vectores cumple:

- Si los vectores son perpendiculares, el producto punto es cero.
- Si los vectores son paralelos, el producto punto es igual al producto de sus tamaños.
- El producto escalar de un vector unitario por sí mismo es igual a la unidad; las otras combinaciones tienen un valor cero.

Ejemplo 4.12: Calcular el ángulo θ que forman los vectores $\overrightarrow{F_1} = \vec{i} + 2\vec{j}$; $\overrightarrow{F_2} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$

Solución:

$$\overrightarrow{F_1} \bullet \overrightarrow{F_2} = \left|\overrightarrow{F_1}\right|\left|\overrightarrow{F_2}\right| \cos\theta \qquad \theta = \arccos \frac{\overrightarrow{F_1} \bullet \overrightarrow{F_2}}{\left|\overrightarrow{F_1}\right|\left|\overrightarrow{F_2}\right|};$$

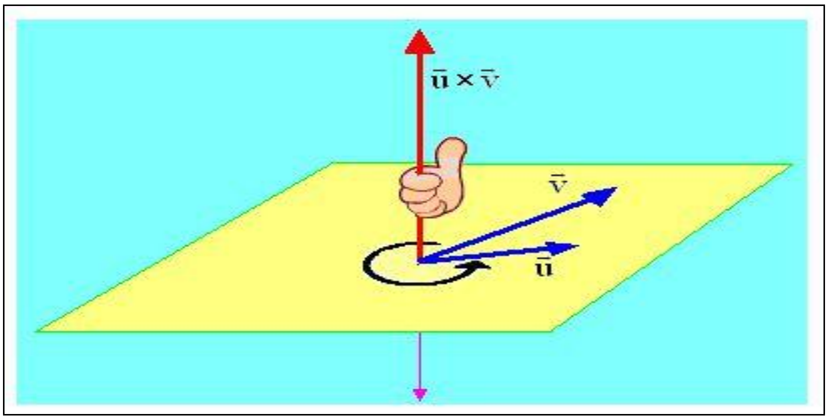
$$\overrightarrow{F_1} \bullet \overrightarrow{F_2} = 1(-3) + 2(4) = -3 + 8 = 5; \ \left|\overrightarrow{F_1}\right|\left|\overrightarrow{F_2}\right| = \sqrt{1+2^2}.\sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{5}.\sqrt{25} = 5\sqrt{5}$$

$$\theta = \arccos \frac{5}{5\sqrt{5}} = \arccos(0{,}447213)$$

$$\theta = 63^0 26\text{`} 5{,}95\text{``}$$

4.3.11 Producto vectorial de dos vectores

Definición 4.3.7: el producto vectorial o producto cruz$\otimes$, es equivalente al producto del tamaño de los vectores multiplicado por el seno del ángulo que lo forman. El sentido está dado por la regla de la mano derecha o el sentido de avance de un tornillo de rosca derecha, cuando giran de $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$.



Fuente: www.aulafacil.com/matamèticas - vectores

Grafica 4.11: Producto vectorial de dos vectores

Se expresa por:

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.sen\theta$$

Coincidentemente $\vec{u} \otimes \vec{v} = A$ (área del paralelogramo formado por los vectores)

La operación cumple con la ley distributiva

El producto se puede resolver aplicando la matriz siguiente:

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

4.3.11.1 **Producto vectorial con los vectores unitarios** $\vec{i}; \quad \vec{j}; \quad \vec{k}$

Es elemental considerar el producto vectorial o producto cruz de los vectores unitarios como fundamento básico:

$$\left|\vec{i} \otimes \vec{i}\right| = 1.1 sen 0^0 = 0$$

$$\left|\vec{j} \otimes \vec{j}\right| = 1.1 sen 0^0 = 0$$

$$\left|\vec{k} \otimes \vec{k}\right| = 1.1 sen 0^0 = 0$$

Otros productos dan como resultado vectores unitarios perpendiculares:

$$\left|\vec{i} \otimes \vec{j}\right| = 1.1 sen 90^0 = 1 \therefore \vec{i} \otimes \vec{j} = \vec{k} \Rightarrow \left|\vec{j} \otimes \vec{i}\right| = 1.1 sen 90^0 = 1 \therefore \vec{j} \otimes \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\left|\vec{i} \otimes \vec{k}\right| = 1.1 sen 90^0 = 1 \therefore \vec{i} \otimes \vec{k} = -\vec{j} \Rightarrow \left|\vec{k} \otimes \vec{i}\right| = 1.1 sen 90^0 = 1 \therefore \vec{k} \otimes \vec{i} = \vec{j}$$

$$\left|\vec{j} \otimes \vec{k}\right| = 1.1 sen 90^0 = 1 \therefore \vec{j} \otimes \vec{k} = \vec{i} \Rightarrow \left|\vec{k} \otimes \vec{j}\right| = 1.1 sen 90^0 = 1 \therefore \vec{k} \otimes \vec{j} = -\vec{i}$$

Conclusión: el producto vectorial de un vector unitario por sí mismo tiene un valor cero. Las otras combinaciones de productos, tienen como resultado el tercer vector unitario, cuyo sentido está dado por la regla de la mano derecha.

Ejemplo 4.13: Calcular $\vec{u}\otimes\vec{v}$, dados los vectores $\vec{u}=3\vec{i}-\vec{j}-4\vec{z}$ y $\vec{v}=4\vec{i}+\vec{j}+3\vec{z}$.

Solución:

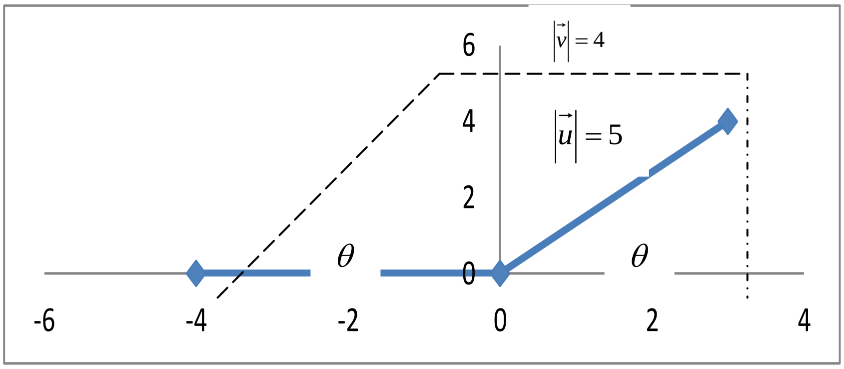
$$\vec{u}\otimes\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-3\vec{i}-16\vec{j}+3\vec{k}-\left(-4\vec{k}-4\vec{i}+9\vec{j}\right)=-3\vec{i}-16\vec{j}+3\vec{k}+4\vec{k}+4\vec{i}-9\vec{j}=\vec{i}-25\vec{j}+7\vec{k}$$

Se observa el proceso del cálculo de la determinante de una matriz de tercer orden, este estudio se realizará con mayor detenimiento en matrices y determinantes.

Ejemplo 4.14: Dados los vectores $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$ y $\vec{v}=-4\vec{i}$, encuentre:

a. La gráfica de los vectores
b. El dibujo de un paralelogramo y calcule su área.

Solución:



Gráfica 4.12: Paralelogramo formado por dos vectores

a. $\vec{u}\otimes\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.sen\theta$

$$\theta=arcsen\frac{4}{5}=53^{0}7`48,37``$$

$$\vec{u}\otimes\vec{v}=(5)(4)sen53^{0}7`48,37``$$

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = (5)(4)0{,}8 = 16$$

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = A$$

$$A = 16$$

Ejemplo 4.15: Las coordenadas de los vértices de un triángulo son: A(3,5), B(-1,3) y C(5,1). Previamente realizar la gráfica y calcular:

a. $\overrightarrow{AB}$

b. $\overrightarrow{BC}$

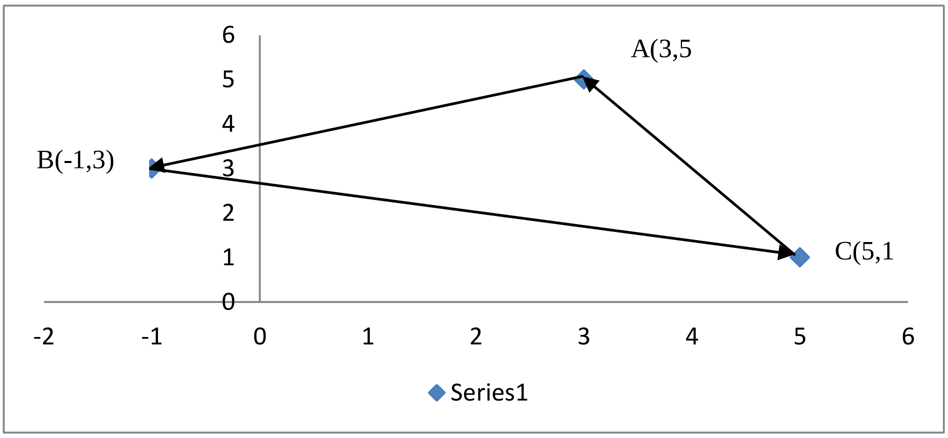
c. $\overrightarrow{CA}$

d. $\overrightarrow{AB} \otimes \overrightarrow{BC}$

e. $\overrightarrow{BC} \otimes \overrightarrow{CA}$

f. $\dfrac{\overrightarrow{AB} \otimes \overrightarrow{BC}}{2}$

g. Análisis y conclusiones



Gráfica 4.13: triángulo del problema 4.12

a. $\overrightarrow{AB} = (-1-3)\vec{i} + (3-5)\vec{j} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$

b. $\overrightarrow{BC} = (5+1)\vec{i} + (1-3)\vec{j} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$

c. $\overrightarrow{CA} = (3-5)\vec{i} + (5-1)\vec{j} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$

d. $\overrightarrow{AB} \otimes \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 12\vec{k} + 8\vec{k} = 20\vec{k} = 20$

e. $\overrightarrow{BC} \otimes \overrightarrow{CA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 24\vec{k} - 4\vec{k} = 20\vec{k} = 20$

f. $\dfrac{\overrightarrow{AB} \otimes \overrightarrow{BC}}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$

g. Dadas las coordenadas se ha encontrado las expresiones de los vectores de A a B, de B a C y luego de C a A; para calcular el producto vectorial se ha aplicado la matriz formada por los vectores unitarios y sus correspondientes valores escalares de los vectores correspondientes. En la respuesta del literal f, se encuentra la fórmula de la mitad del área del paralelogramo formado por los vectores respectivos. En conclusión el área del triángulo es:

$$A = \frac{\overrightarrow{AB} \otimes \overrightarrow{BC}}{2} = 10\,unidades \quad cuadradas$$

GUÍA DE ESTUDIO 19

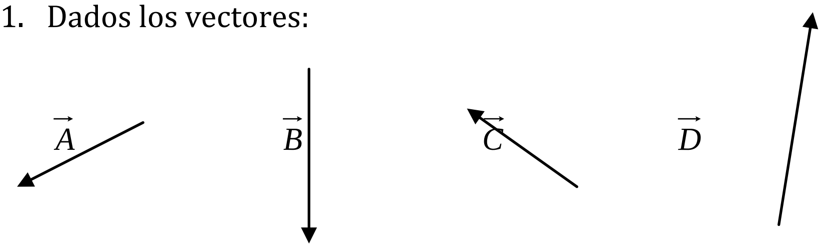
Objetivo

Estudiar los conceptos y características fundamentales de las magnitudes escalares y vectoriales para resolver problemas geométricos, algebraicos de la vida real en forma analítica y gráfica.

Actividades

Los ejercicios que se encuentran a continuación deberán ser resueltos en forma individual o en equipo de tres estudiantes, en el tiempo de trabajo autónomo.

1. Dados los vectores:



1.1 Grafique aplicando el método del triángulo

a. $\vec{A}+\vec{B}$

b. $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)-\vec{C}$

c. $\vec{B}-\vec{C}$

d. $\vec{B}+\vec{C}$

e. $\vec{D}-\vec{C}$

f. $\left(\vec{A}+\vec{C}\right)-\left(\vec{B}-\vec{D}\right)$

1.2 Grafique aplicando el método del paralelogramo

a. $\vec{A}+\vec{C}$

b. $\left(\vec{A}+\vec{D}\right)-\vec{C}$

c. $\vec{A}-\vec{C}$

d. $\vec{D}+\vec{C}$

e. $-\vec{A}-\vec{C}$

f. $\left(\vec{A}+\vec{D}\right)-\left(\vec{B}-\vec{D}\right)$

g. $\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{D}\right)$

h. $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\left(\vec{C}+\vec{D}\right)$

i. $\left(\vec{B}+\vec{C}\right)+\left(\vec{C}+\vec{D}\right)$

j. $\left(\vec{B}+\vec{C}\right)+\left(\vec{C}-\vec{D}\right)$

k. $\left(\vec{A}-\vec{B}\right)+\left(\vec{C}-\vec{D}\right)$

1.3 Grafique utilizando el método del polígono

a. $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

b. $\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$

c. $\vec{A}+\vec{C}+\vec{D}$

d. $\vec{A}-\vec{C}-\vec{B}+\vec{D}$

e. $\vec{A}-\vec{C}-\vec{B}+\vec{D}$

2. Dados los vectores $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{v}=-3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{w}=-2\vec{i}-5\vec{j}$ y $\vec{p}=5\vec{i}-3\vec{j}$.

Hallar:

a. $\left|\vec{u}\right|$

b. $\left|\vec{v}\right|$

c. $\left|\vec{w}\right|$

d. $\left|\vec{p}\right|$

e. $\vec{u}+\vec{v}$

f. $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$

g. $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|$

h. $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)-\vec{w}$

i. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\left(\vec{p}+\vec{w}\right)$

j. $\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)+\left(\vec{w}\bullet\vec{p}\right)$

k. $\vec{u}\otimes\vec{v}$

l. $\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|$

m. El ángulo θ, formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

n. El ángulo θ, formado por los vectores $\vec{p}$ y $\vec{w}$

o. El ángulo θ, formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$

p. El ángulo θ, formado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{p}$

3. El producto $\left|\vec{i} \otimes \vec{i}\right|$, es igual a: _____

   a. Cero
   b. 1
   c. – 1
   d. $\vec{j}$

4. El producto $\left|\vec{i} \otimes \vec{j}\right|$, es igual a: _____

   a. $\vec{k}$
   b. 1
   c. – 1
   d. $-\vec{k}$

5. En el producto escalar de dos vectores, si los vectores son perpendiculares, el producto punto, es: _____

   a. 1
   b. – 1
   c. Cero
   d. Ninguna de las anteriores

6. El producto escalar $\vec{j} \bullet \vec{j}$, es igual a: _____

   a. Cero
   b. – 1
   c. 1
   d. Ninguna de las anteriores

7. El producto escalar $\vec{k} \bullet \vec{j}$, es igual a: _____

   a. – 1
   b. 1
   c. Cero
   d. Ninguna de las anteriores.

8. El producto vectorial $\vec{k} \otimes \vec{j}$, es igual a: _____
    a. 1
    b. $\vec{i}$
    c. 0
    d. $-\vec{i}$
9. Dados los puntos A(3,5), B(- 1,3) y C(-2, - 5). Encontrar:
    a. $\overrightarrow{AB}$
    b. $\overrightarrow{BC}$
    c. $\overrightarrow{CA}$
    d. $\overrightarrow{AB} \otimes \overrightarrow{BC}$
    e. $\overrightarrow{BC} \otimes \overrightarrow{CA}$
    f. Analice los resultados de los literales d y e. y saque conclusiones.
    g. Calcule el área del triángulo formado por los puntos A, B y C.

4.4 MATRICES

Los sistemas de ecuaciones anteriormente estudiados y analizados se puede dar solución aplicando matrices, mediante un ordenamiento de los coeficientes de las variables, junto con ello en esta sección se tomará en cuenta algunas de las propiedades de este importante tema.

Definición 4.4.1: Una matriz es una disposición de elementos en filas y columnas que cumplen ciertas reglas.

Está denotado por:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Las matrices por lo general están compuestas por los números reales R. La **i-ésima** fila de A es representada por $[a_{11} \quad \ldots \quad a_{1n}]o(1 \le i \le m)$. La **j-ésima** columna de A es

$$\begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{vmatrix} \qquad (1 \le j \le n)$$

El término i se refiere la salida y j la llegada, es decir i es la primera componente y j la segunda componente del (i,j)

Ejemplo 4.16: Matrices

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -7 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

La matriz A tiene tres filas y tres columnas, por lo tanto es de orden mxn, dónde m=3 y n=3; la matriz B tiene cuatro filas y cuatro columnas o simplemente de orden 4; la matriz C tiene dos filas y dos columnas o de orden 2x2 o de orden 2; la matriz C tiene una fila y cuatro columnas, es decir de orden 1x4.

4.4.1 CLASES DE MATRICES

Las matrices se clasifican de acuerdo a su estructura en:

a. <u>Matriz cuadrada</u>

Definición 4.4.2: La matriz cuadrada es aquella que tiene igual número de filas y columnas, es decir m = n. la forma general es:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ o } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

b. <u>Matriz idéntica</u>

Definición 4.4.3: La matriz idéntica I es una matriz cuadrada en la cual los elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y los elementos restantes son iguales a cero.

Las matrices

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Son matrices idénticas de orden 2, 3 y 4 respectivamente.

c. <u>Matriz nula</u>

Definición 4.4.4: Una matriz es nula cuando todos sus elementos son iguales a cero.

Ejemplo 4.17: Matrices nulas

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Las matrices A y B son nulas. La notación es o_{mn}

Una matriz cero es al mismo tiempo es simétrica, antisimètrica, nilpotente y singular

4.4.2 <u>Transpuesta de una matriz</u>

Definición 4.4.5: En la matriz A (m x n) con elementos a_{ij}, la transpuesta de A, se denota por A^T, es una matriz de orden (n x m) que contenga los elementos a_{ij}; en otras palabras, es el intercambio de filas y columnas.

Ejemplo 4.18:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad A^T = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

4.3.2.1 Propiedades

- **La transpuesta de la transpuesta de una matriz es el matriz origen.**

$$\left(A^T\right)^T = A$$

- **Sean A y B matrices con elementos** $\in$ **a un anillo A y sea** $C \in A$**, entonces:**

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(CA)^T = CA^T$$

- **Producto de matrices**

$$(AB)^T = B^T A^T$$

- **Si A es una matriz cuadrada cuyas entradas son números reales, entonces**:

$A^T A$= es semidefinida positiva

- **Propiedades asociadas:**

d. Matriz simétrica

Definición 4.4.5: Una matriz es simétrica cuando cualquier par de elementos simétricos respecto a la diagonal principal son opuestos se expresa por:

$$A^T = A$$

Ejemplo 4.19: Matriz simétrica,

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix};\ A^T = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

e. Matriz antisimétrica

Definición 4.4.6: Una matriz antisimétrica es toda matriz cuadrada que coincide con la opuesta a su transpuesta y los elementos de la diagonal principal son nulos.

$$A = -A^T$$

Ejemplo 4.20: Matriz antisimétrica

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix};\ -A^T = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Si los elementos de una matriz A son números complejos y su transpuesta coincide con su conjugada se dice que la matriz es hermitica.

$$A^T = A,\ A = A^T = A^T$$

Y antihermitica

$$A^T = -A$$

Ejemplo 4.21: Matriz hermitica

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4+3i \\ 4-3i & 1 \end{vmatrix}$$

4.4.3 <u>Matrices iguales</u>

Definición 4.4.6:

Dos matrices m x n, A = $\lfloor a_{ij} \rfloor$ y B = $\lfloor b_{ij} \rfloor$ son iguales si coinciden entrada por entrada; es decir a_{ij} = b_{ij} para i = 1, 2, 3, . . . m; y j = 1, 2, 3, . . . n.

Ejemplo 4.22:

Las matrices

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \\ 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} o & p & q \\ r & s & t \\ u & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

A = B siempre y cuando o = 4; p = - 5; q = 2; r = 6; s = 5; t = 5; u = 0

4.4.4 OPERACIONES CON MATRICES

4.4.4.1 <u>Propiedades de las operaciones entre matrices</u>

Las propiedades que se dan entre las operaciones matrices son las siguientes:

Propiedad de la suma y sustracción de matrices.

Para sumar o restar matrices el orden m x n de ambas debe ser igual.

Si se suman las matrices A y B para formar una matriz resultante C, esta tendrá el mismo número de filas y columnas de A y B. los elementos de C se obtienen sumando los correspondientes elementos de A y B.

Ejemplo 4.23: Dadas las matrices.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

a. Sumar A + B

b. Restar A – B

a. $A + B = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -10 & 9 \\ 4 & 2 & 4 & -3 \\ 8 & 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

b. $A - B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

Propiedad de la suma de matrices

- *Si A y B son matrices de orden m x n, entonces A + B = B + A*

  Se cumple la **propiedad conmutativa.**

- *Si A y B son matrices de orden m x n, entonces A + (B + C) = (A + B) + C*

  Cumple la **propiedad asociativa.**

- *Toda matriz A de orden m x n sumada a la matriz nula* mon *es igual a la matriz A.*

Cumple la **propiedad de identidad**

- *Dada una matriz A de orden m x n, existe una matriz B de orden m x n tal que* $A+(-A)=o_{mn}$

Cumple la **propiedad opuesta**

<u>Multiplicación por escalares</u>

El escalar es un número real. La multiplicación por escalares de una matriz es la multiplicación de ésta por un escalar. Por ejemplo si k es un escalar y A es una matriz de orden 3 x 2, entonces

$$kA = k\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2k & 3k \\ 4k & 0 \\ k & 2k \end{vmatrix}$$

El producto interno

Definición 4.5.7:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \end{vmatrix} \text{ y } B = \begin{vmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ . \\ . \\ . \\ b_{m1} \end{vmatrix}$$

Entonces el producto interno $A.B = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ... + a_{1n}b_{m1}$

La definición nos lleva a conocer tres casos:

a. El producto interno se define cuando las filas y columnas contienen el mismo número de elementos.

b. El producto interno resulta cuando una fila se multiplica por una columna y el producto es una cantidad escalar.

c. El producto interno se calcula multiplicando los elementos correspondientes de las filas y columnas mediante una suma algebraica.

Ejemplo 4.24:

$$A.B = (4 \quad -3)\begin{vmatrix} 5 \\ 4 \end{vmatrix} = (4)(5) + (-3)(4) = 8$$

$$S.T = (1 \quad 3 \quad 5 \quad 6)\begin{vmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} = (1)(4) + (3)(-7) + (5)(2) + (6)(0) = 4 - 21 + 10 + 0 = -7$$

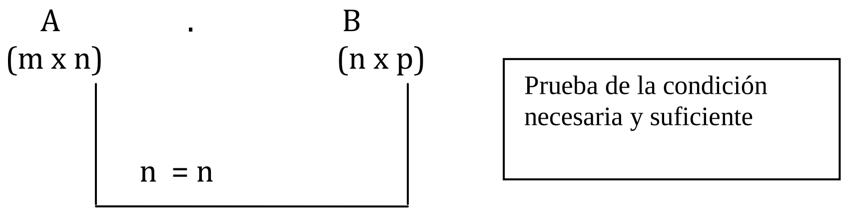
Multiplicación de matrices

Definición 4.4.8: Sea una matriz A = $\lfloor a_{ij} \rfloor$ de orden m x n, y una matriz B = $\lfloor b_{ij} \rfloor$ de orden n x p. entonces se dan las propiedades de las matrices:

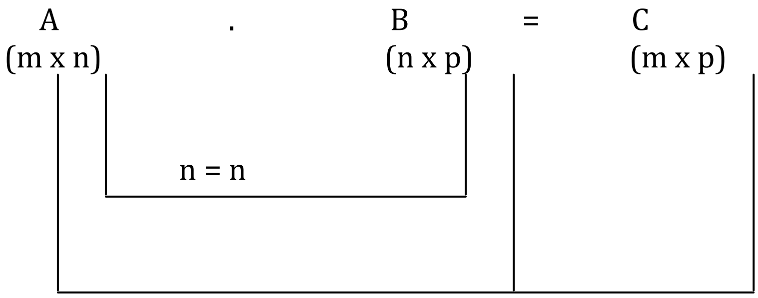
I. *El producto A.B se define si y sólo si el número de columnas de A es igual al número de filas de B, o bien n = n*

II. *Si la multiplicación se realiza, el producto resultante será una matriz de orden m x p.*

La primera propiedad de la multiplicación establece la condición necesaria y suficiente de la multiplicación de matrices. Si $n \neq n$, no es posible multiplicar matrices.



La propiedad II define el orden de una matriz de productos



Ejemplo 4.25: Sean las matrices

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A.B = \begin{vmatrix} (3)(-2)+(1)(5)+(4)(1) & (3)(4)+(1)(3)+(4)(5) \\ (-1)(2)+(2)(5)+(5)(1) & (-1)(4)+(2)(3)+(5)(5) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 35 \\ 17 & 27 \end{vmatrix}$$

Según la propiedad enunciada anteriormente, la matriz resultante es C de orden 2x2

En la multiplicación de matrices el producto A x B$\neq$ B x A. Por lo tanto no se da la propiedad conmutativa.

4.4.5 Producto interno y la representación de una ecuación

El producto interno es aplicado en la representación de una ecuación. La expresión

$$3x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 2x_4$$

Al representar como producto interno

$$(3 \quad -5 \quad 4 \quad -2)\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix}$$

La fila contiene los coeficientes de las variables y la columna contiene las variables. Al multiplicar las dos matrices el resultado es la ecuación original. Si la ecuación tiene término independiente 20, el producto interno es igual a 20.

$$(3 \quad -5 \quad 4 \quad -2)\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = 20$$

En forma general la representación de la ecuación está dada por:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

En forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_4 \end{vmatrix} = b$$

En resumen: las ecuaciones en forma unitaria se pueden representar mediante el producto interno

4.4.6 Representación de sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones se representa mediante la multiplicación de matrices.

Ejemplo 4.26: Dado el sistema de ecuaciones representar en matrices:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 5x_2 &= 10 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

Por medio de matrices el sistema es:

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ 8 \end{vmatrix}$$

Al realizar la multiplicación en el primer miembro, el resultado es el sistema formado por los coeficientes y las variables. De este ejemplo se puede deducir la forma general de un sistema de ecuaciones (m x n).

El sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ ----------------&---- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Este sistema se puede resumir; Ax = B

Donde A es la matriz formada por los coeficientes de las variables, x está constituida por la columna de n elementos variables y B es una columna que contiene m elementos (constantes). Para mayor ilustración:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{vmatrix}$$

4.4.7 Sistema de ecuaciones lineales y matrices

Ejemplo 4.27: Representar en forma matricial el sistema:

$2\,x_1 - x_2 + 3\,x_4 = 10$

$3\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 - 5\,x_4 = 5$

$x_1 - 3\,x_2 - 2\,x_4 = 1$

Representando en la forma matricial Ax = B

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Número infinito de soluciones como solución particular de un sistema no homogéneo más soluciones del sistema homogéneo. Grossman, S. Algebra Lineal. Ejemplo 2. Pág. 66

$$\begin{aligned} x + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 5 \\ -x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 8 & -1 \end{array}\right) \text{ f1* - 2 y sumando f2; f1 sumando a f3 = } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

Luego f2* -1 y sumando a f3; f2 * 2 y sumando a f1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13 & 4 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se observa que hay un número infinito de soluciones. Haciendo x3 = 0 (cualquier otro número sería igualmente apropiado, se obtiene x1 = 4 y x2 = - 1. Por lo tanto, una solución particular es xp = (4, - 1, 0)

Al reducir por filas el sistema homogéneo asociado se llega a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En consecuencia, todas las soluciones del sistema homogéneo asociado satisfacen

$$x_1 = -13x_3, \quad x_2 = 7x_3$$

O bien $x_h = (x_1, x_2, x_3) = (-13x_3, 7x_3, x_3) = x_3(-13,7,1)$, Por lo tanto, cada una de las soluciones se pueden escribir como

$$x = x_p + x_h = (4,-1,0) + x_3(-13,7,1)$$

Para un valor apropiado de x3 = 0 da la solución (4, -1, 0), mientras que x3 = 2 la solución es (-22, 13, 2)

GUÍA DE ESTUDIO 20

Objetivo

Evidenciar aprendizaje de definiciones, propiedades, operaciones de matrices y resolución de sistemas de ecuaciones.

Actividades

Mediante talleres dentro y fuera del aula, resolver los ejercicios que se dan a continuación:

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$E = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} \quad F = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad H = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} \quad I = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 7 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Efectuar las operaciones siguientes si es posible:

a. A + C
b. A + F
c. D + G
d. B + H
e. C + I

f. A - C
g. A - F
h. D - G
i. B - H
j. A*F
k. G*D
l. E*C
m. E *I

2. Escriba en forma matricial los siguientes sistemas:

a. 2x + 3y = 5
3x – 5y = 0

b. 2x – 4y + 5z = 3

c. 3x – 2y + z = 0
x + 3y + 2z = 2
-3x + 2y – 2z = 3

e. 2x – 4y + z – 3w = - 2
x + 2y - 3w = 3
3y – 2z + w = - 1
2x + 3z – 2w = 0

3. Encuentre la transpuesta de cada una de las matrices dadas en el ejercicio 1

4. de su propia creación escriba las matrices que cumplan la condición siguiente:

a. A(B + C) = AB + AC

b. $(A + B)^T = A^T + B^T$

5. El producto interno de la ecuación $6 = 3x_1 - 4x_2 - 5x_3$, es: _____

a. 3

b. -5

c. 4

d. 6

6. Una matriz antisimètrica es toda matriz cuadrada que coincide con la opuesta a su transpuesta y los elementos de la diagonal principal son:

   a. Positivos

   b. Negativos

   c. Nulos

   d. Ninguna de las anteriores

4.5 DETERMINANTES

Definición 4.5.1: Dada una matriz cuadrada, la combinación de sus elementos son calculados para obtener un número real. La notación está dada por $|A|$ que se lee "la determinante de A".

Hay distintas formas para calcular la determinante de una matriz, dependiendo de su orden.

Ejemplo 4.28: La determinante de una matriz (1 x 1)**.**

La determinante de una matriz 1 x 1 es el valor contenido en la matriz. Si A = (4), $|A|$ = 4. Si B = (6), $|B|$ = 6

La determinante de una matriz (2 x 2)

En la matriz

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(-) (+)

La diagonal principal (o positiva) está formada por los elementos a_{11} y a_{22}; la diagonal secundaria (o negativa) por los elementos a_{12} y a_{21}. La determinante de A es igual al producto a_{11} . a_{22} menos el producto a_{12} . a_{21}. O sea

$$|A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Ejemplo 4.29:

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}$$

$|A|$ = (5)(4) – (7)(-6) = 20 + 42 = 62

Determinante de una matriz (3x3) o de orden 3

En la matriz

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Uno de los procesos es el siguiente:

1. Se aumenta las dos primeras columnas a la matriz original.
2. Se identifican tres elementos en las tres diagonales principales (+) $(D_1, D_2 y D_{3)})$ y los tres situados en las tres diagonales secundarias (-) $(d_1, d_2 y d_{3)})$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(-) (-) (-) + + +

3. Se multiplican los tres elementos en cada diagonal principal y en cada diagonal secundaria.

4. La determinante es igual a la sumatoria de los productos de las tres diagonales principales menos la sumatoria de los productos de las tres diagonales secundarias.

La expresión algebraica de la determinante de la matriz de tercer orden es:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

> **PUNTO DE APOYO**
> Para encontrar la determinante de la matriz de tercer orden también se puede agregar las dos primeras filas verticalmente a la matriz original y luego se siguen los pasos 2, 3 y 4 del proceso anterior.

Otra forma de solución es la siguiente:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

\+ + + - - -

Se multiplican los elementos en forma triangular en algunos casos, observe la diagonal principal formada por a_{12} . a_{23}, éstos son multiplicados por a_{31}, el resultado es +($a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$); la segunda diagonal principal es el producto +($a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$); la tercera diagonal principal se completará en forma triangular, el producto es +($a_{21}\, a_{32}\, a_{13}$).

El mismo procedimiento se realiza con los elementos de las diagonales secundarias, la primera diagonal secundaria es el producto triangular -($a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$), la segunda diagonal secundaria es el producto -($a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$); la tercera diagonal secundaria es el producto -($a_{23}\, a_{32}\, a_{11}$).

La determinante es la sumatoria de todos los productos. (Considérese la propiedad conmutativa de la multiplicación "el orden de los factores no altera el producto").

$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Ejemplo: 4.30:

$$B = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 4 & -7 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Agregando las dos primeras columnas

$$B = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 9 & 5 & 8 \\ 4 & -7 & 0 & 4 & -7 \\ 6 & 3 & 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$|B|$ = (5)(-7)(2) + (8)(0)(6) + (9)(4)(3) – (8)(4)(2) – (5)(0)(3) – (9)(-7)(6)

= - 70 + 0 + 108 – 64 + 378 = 352

Para el estudiante, el mismo ejemplo resuelva aumentando verticalmente las dos primeras filas; lo mismo la resolución en forma triangular.

PUNTO DE APOYO

Las determinantes de matrices cuadradas de segundo y tercer orden estudiadas hasta ahora tienen estos procedimientos, no es posible aplicar estos métodos en matrices de cuarto, quinto o más órdenes, o sea 4x4, 5x5, etc.

4.5.1 Matrices menores y Cofactores

Sea la matriz

$$A = \left[a_{ij}\right] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Una matriz menor de la matriz A = $\left\lfloor a_{ij} \right\rfloor$, es la determinante de una matriz cuadrada de segundo orden que queda después de que la fila i y la columna j sean eliminadas. Se denota por $\left\lfloor M_{ij} \right\rfloor$. Para mayor claridad encontremos la matriz menor $[M_{11}]$ de $[a_{11}]$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{; la matriz } [M_{12}] \text{ está dada por } M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Por lo tanto la determinante de $[M_{11}]$ = $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, y $[M_{12}]$ = $a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$

Cofactores

El cofactor de un componente a_{ij} se denota por A_{ij}, y está definido por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Ejemplo 4.25: El cofactor A23 está dado por:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Con estas definiciones se puede encontrar la determinante de la matriz de tercer orden A

$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$, o también $|A| = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo: 4.31:

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -5 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|B| = 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$ = 2(8 – 12) – 3(-10 – 18) + 5(-20 – 24)

= 2(-4) – 3(-28) + 5(-44) = - 8 + 84 – 220 = - 144

4.5.2 Propiedades de las determinantes

Propiedad 1. Si todos los elementos de una fila o columna son cero, el valor de la determinante es cero.

Ejemplo 4.32:

$$[A] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0\,; \qquad [B] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0\,; \qquad [C] = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 2. Si se intercambian dos filas o dos columnas cualesquiera, el valor de la determinante cambia de signo.

Ejemplo 4.33:

$$[A] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 24 + 0 - 6 - 0 - 6 = 24$$

Si intercambiamos la primera fila con la tercera

$$[A] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 6 - 12 - 24 = -24$$

Propiedad 3. Si se intercambian todas las filas y todas las columnas el valor de la determinante es el mismo.

Considerando el ejemplo anterior e intercambiando las filas por las columnas

$$[A]=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=6+6+0-12-24-0=-24$$

Propiedad 4. Si se multiplica un número cualquiera a una fila o columna y este producto se suma a otra fila o columna el valor de la determinante no altera.

Siguiendo con el ejemplo anterior

$$[A]=\begin{vmatrix} 2 & 2(3)+1 & 2 \\ 0 & 0(3)+3 & 3 \\ 2 & 2(3)+4 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix}=6+42-12-60=-24$$

Propiedad 5. Si todos los elementos de una fila o columna se dividen por una constante, el valor de la determinante queda dividido por dicha constante.

El lector escriba un ejemplo y demuestre esta propiedad

Propiedad 7. Si dos filas o columnas son iguales el valor de la determinante es cero

$$[A]=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=10+24+4-10-24-4=0$$

4.5.3 Trasformación de una matriz de cuarto orden a una matriz menor de tercer orden.

Ejemplo 4.34:

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución

Primer paso. Se identifica una fila y una columna en cuya intersección tenga la unidad; en el caso que nos asiste, se toma la segunda fila y la cuarta columna.

Segundo paso. A la cuarta columna se denomina **columna base.**

Tercer paso. Se señala en un recuadro la fila dos para anular los elementos 3 y 2 aplicando la propiedad 4. Se multiplica por – 3 los elementos de la cuarta columna y este producto se suma a la primera columna. La matriz es:

$$B = \begin{vmatrix} (-1)(-3)+2 & 3 & 4 & -1 \\ (1)(-3)+3 & 2 & 0 & 1 \\ (2)(-3)+0 & 2 & 1 & 2 \\ (3)(-3)+2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Multiplicando – 2 a los elementos de la columna base y sumando a los correspondientes de la columna 2, se obtiene

$$B = \begin{vmatrix} 5 & (-1)(-2)+3 & 4 & -1 \\ 0 & (1)(-2)+2 & 0 & 1 \\ -6 & (2)(-2)+2 & 1 & 2 \\ -7 & (3)(-2)+1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 1 & 2 \\ -7 & -5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Aplicando el factor A24, se elimina la segunda fila y la cuarta columna, el cofactor es positivo que 1 está en i = 2 y j = 4, entonces

$$B = 1\begin{vmatrix} 5 & 5 & 4 \\ -6 & -2 & 1 \\ -7 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 4 \\ -6 & -2 & 1 \\ -7 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

De esta manera se ha transformado en una matriz menor o matriz de cofactores $M_{2.4}$

GUÍA DE ESTUDIO 21

Objetivo

Reforzar la teoría – práctica del cálculo de las determinantes para el aprendizaje duradero en el campo matemático.

Actividades

Cada uno de los ejercicios debe ser realizado en forma individual, en el caso de alguna dificultad consulte con uno de los compañeros de aula. Esta guía es parte del trabajo autónomo del estudiante.

1. Encontrar la determinante de las siguientes matrices:

   a. $A = |b|$

   b. $B = |a|$

   c. $A = |5|$

   d. $N = |-8|$

   e. $M = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$

   f. $T = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$

   g. $S = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$

   h. $R = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}$

i. $A = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

j. $C = \begin{vmatrix} -8 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

k. $B = \begin{vmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 3 & 9 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

l. $D = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

2. Reúnase con dos compañeros de aula y escriba cada uno una matriz de cuarto orden que tengan las siguientes características: dos filas o dos columnas iguales, aplicando cofactores transforme a una matriz de orden tres y encuentre la determinante.

3. Encuentre todas las matrices menores en los ejercicios desde el literal j hasta l

4. Dadas las matrices de cuarto orden, transformar en matrices de tercer orden y calcular la determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \; B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Facetas

Después de leer conteste ¿Sabe de otras etapas del proceso de investigación? ¿Las etapas de la presente lectura son pertinentes para realizar un trabajo aplicado a matrices y determinantes?

EL PROCESO DE LA INVESTIGACIÓN

González S. et al (1996) con relación al proceso de investigación manifiestan: Lourdes Munch, considera que la investigación es un proceso que se compone de varias etapas o fases sucesivas que se realizan con un cierto orden. El proceso posee cierta flexibilidad de acuerdo con los fines concretos que se persigan; de este modo, existen múltiples modelos, pero existen fases comunes al proceso de investigación que en forma resumida son:

1. **Planteamiento del problema**. Es la definición del objeto de estudio y sus limitaciones.

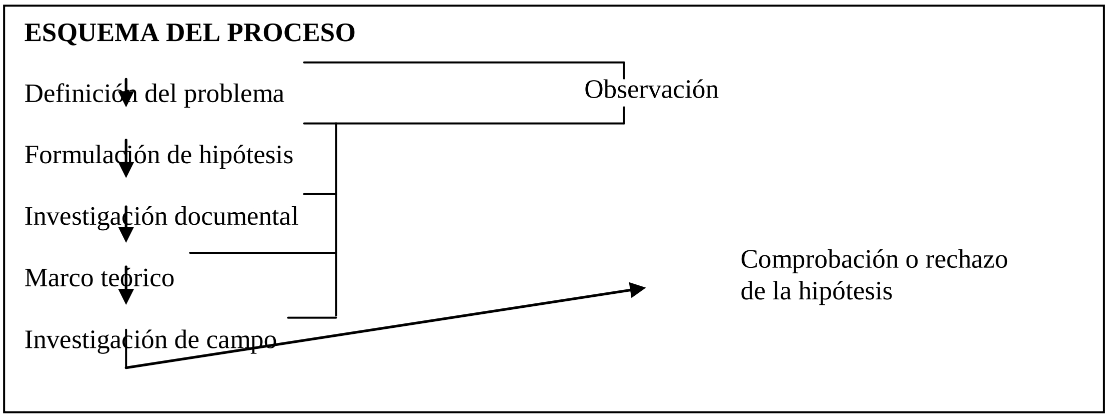
2. **Marco teórico**. Con base en la investigación bibliográfica se fundamenta la teoría que sustentará la investigación.

3. **Formulación de hipótesis y variables.** Consiste en establecer la respuesta tentativa al problema y las relaciones causales entre el fenómeno y sus partes, con la consecuente operatividad de las variables.

4. **Comprobación de la hipótesis.** Se aplican las técnicas de investigación bibliográfica y de campo así como la recolección y procesamiento de la información a fin de verificar la hipótesis.

5. **Análisis e informe de resultados**. Es el estudio de la información mediante procedimientos estadísticos e interpretación de los resultados. Se elaboran las conclusiones y se redacta el informe.

6. **Propuesta de solución al problema**. Consiste en elaborar un documento con su propia estructura para dar solución al problema de estudio. (pp.73,74)



4.5.4 La inversa de una matriz

En la multiplicación de los reales, el inverso multiplicativo de n es 1/n; el inverso de 5 es 1/5, el producto de ellos es igual a 1, denominado elemento idéntico.

En las matrices se da un caso parecido con algunas matrices cuadradas. La relación de una matriz A y su inversa A^{-1} o 1/A es igual a la matriz idéntica, así:

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Punto de Apoyo

- Para ser una inversa una matriz, ésta tiene que ser cuadrada.
- La inversa de una matriz A es cuadrada y del mismo orden.
- No toda matriz cuadrada posee una inversa.

4.5.4.1 Matriz inversa de segundo orden

Ejemplo 4.35:

Si $A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ determinar una matriz B, si existe, con la propiedad de que AB = BA = I

Solución

Denotando por $B = \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$ queremos determinar, si es posible, los valores de p, q, r, y s para los cuales

$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; multiplicando las matrices del primer miembro de la igualdad

$\begin{vmatrix} 4p+2r & 4q+s \\ -p+3r & -p+3s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ Considerando la igualdad: 4p + 2r = 1, - p + 3r = 0, 4q + s = 0, -q + 3s =1

Resolviendo los sistemas de ecuaciones: p = ¾; q = -2/14; r = 1/14 y s = 4/14, sustituyendo en B tenemos:

$$B = \begin{vmatrix} \frac{3}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{4}{14} \end{vmatrix} o \quad A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{3}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{4}{14} \end{vmatrix}$$

Se pide al lector realice la operación AB = I y BA = I

Entonces $AA^{-1} = I$

De esta manera se puede calcular la fórmula para encontrar la inversa de una matriz cuadrada de segundo orden que se da a continuación

Dadas las matrices

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad B = A^{-1} \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \qquad I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Por definición $AA^{-1} = I$. Sustituyendo tenemos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}p + a_{12}r & a_{11}q + a_{12}s \\ a_{21}p + a_{22r} & a_{21}q + a_{22}s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$ igualando los términos correspondientes se obtiene los sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}p + a_{12}r &= 1; \quad a_{11}q + a_{12}s = 0 \\ a_{21}p + a_{22r} &= 0; \quad a_{21}q + a_{22}s = 1 \end{aligned}$$

Resolviendo los sistemas de ecuaciones

$$p = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; \ q = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; r = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; s = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Sustituyendo los valores en A^{-1}

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \dfrac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{vmatrix}$$ por lo tanto

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{vmatrix}$$ Constituye la fórmula para calcular la inversa de una matriz de segundo orden.

Ejemplo 4.36:

Encontrar la matriz inversa de

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Para aplicar la fórmula es necesario conocer la determinante de la matriz

$|B| = 2x5 - 7x3 = 10 - 21 = -11$

Sustituyendo en la fórmula el valor de la determinante, el intercambio de los elementos de la diagonal principal y el cambio de signos en la diagonal secundaria, se obtiene

$$B^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{5}{11} & \frac{7}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{vmatrix}$$

Para verificar se multiplica la matriz B por su inversa B^{-1} y el resultado de ser una matriz idéntica de segundo orden. Para mayor ilustración se procede a realizar la operación.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -5/11 & 7/11 \\ 3/11 & -2/11 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2\left(-\frac{5}{11}\right) + 7\left(\frac{3}{11}\right) & 2\left(\frac{7}{11}\right) + 7\left(-\frac{2}{11}\right) \\ 3\left(-\frac{5}{11}\right) + 5\left(\frac{3}{11}\right) & 3\left(\frac{7}{11}\right) + 5\left(-\frac{2}{11}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{10}{11} + \frac{21}{11} & \frac{14}{11} - \frac{14}{11} \\ -\frac{15}{11} + \frac{15}{11} & \frac{21}{11} - \frac{10}{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Otro proceso para encontrar la inversa de una matriz de segundo orden es la reducción gaussiana.

El procedimiento es:

1. A la matriz A se aumenta una matriz idéntica $\left(|A|I\right)$.

2. Se utilizan operaciones en las filas de toda la matriz aumentada de forma que la matriz A se transforma en una matriz idéntica. La forma resultante es

$$\left(I|A^{-1}\right)$$

De esta manera la inversa de la matriz está a la derecha de la línea vertical.

Ejemplo 4.37: Aplicando la transformación gaussiana encontrar la inversa de la matriz:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\left|\begin{array}{cc:cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right|$$ Se divide por 2 a la primera fila

$$\left|\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right|$$, la primera fila se multiplica por – 3 y se suma a la segunda fila

$$\left|\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right|$$, se multiplica $-\frac{2}{7}$ a la segunda fila

$$\left|\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right|$$, multiplicando $-\frac{5}{2}$ a la segunda fila y sumando a la primera fila

De esta forma la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{vmatrix}$$

Para comprobar se multiplica A por A^{-1} y el resultado deberá dar la matriz idéntica. Se pide al lector que realice la verificación.

4.5.4.2 Adjunta de una matriz

La adjunta de una matriz es la transpuesta de los cofactores, en la que cada elemento de la matriz es sustituido por su cofactor o adjunto.

Para encontrar el adjunto del elemento hay que considerar a_{ij}:

Si i + j es par el elemento adjunto tiene signo +

Si i + j es impar el elemento adjunto tiene signo –.

Dada la matriz:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$, para encontrar la adjunta se procede a encontrar:

$$CoA = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$(CoA)^T = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = a \text{ (adjunta de una matriz)}$$

Ejemplo 4.38: Calcular la adjunta de la matriz:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$CoA = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -7 & 0 & 14 \\ -1 & -3 & 11 \end{vmatrix}$$

$$(CoA)^T = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -1 & 14 & 11 \end{vmatrix}$$

$$a = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -1 & 14 & 11 \end{vmatrix}$$

La multiplicación de la matriz A por su adjunta, el resultado es el producto de la determinante de A por la matriz idéntica. En este caso el procedimiento es:

$$\mathrm{A}a = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -7 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -1 & 14 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2(2)+3(6)+1(-1) & 2(-7)+3(0)+1(14) & 2(-1)+3(-3)+1(11) \\ -3(2)+1(6)+0(-1) & -3(-7)+1(0)+0(14) & -3(-1)+1(-3)+0(11) \\ 4(2)+(-1)(6)+2(-1) & 4(-7)+(-1)(0)+2(14) & 4(-1)+(-1)(-3)+2(11) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4+18-1 & -14+0+14 & -2-9+11 \\ -6+6+0 & 21+0+0 & 3-3+0 \\ 8-6-2 & -28+0+28 & -4+3+22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{vmatrix} = |21| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

PUNTO DE APOYO

Multiplicar la matriz por su adjunta a , el resultado es una matriz escalonada por filas reducida. La diagonal principal està formada por el valor a de la determinante de A

4.5.4.3 Matriz inversa de tercer orden

Para encontrar la inversa de tercer orden se puede aplicar cofactores o el método gaussiano

Ejemplo 4.39: Aplicando cofactores encontrar la inversa de la matriz:

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$CoB = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 & -5 \\ -5 & 15 & -1 \\ 4 & -12 & 8 \end{vmatrix}$$

$$(CoB)^T = \begin{vmatrix} 11 & -5 & 4 \\ 3 & 15 & -12 \\ -5 & -1 & 8 \end{vmatrix} = a \text{ (Adjunta)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 11 & -5 & 4 \\ 3 & 15 & -12 \\ -5 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3(11)+1(3)+0(-5) & 3(-5)+1(15)+0(-1) & 3(4)+1(-12)+0(8) \\ 1(11)+3(3)+4(-5) & 1(-5)+3(15)+4(-1) & 1(4)+3(-12)+4(8) \\ 2(11)+1(3)+5(-5) & 2(-5)+1(15)+5(-1) & 2(4)+1(-12)+5(8) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 33+3+0 & -15+15+0 & -12+12+0 \\ 11+9+20 & -5+45-4 & 4-36+32 \\ 22+3-25 & -10+15-5 & 4-12+40 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{vmatrix}$$

La determinante de B es 36

Por lo tanto

$$B.a = \begin{vmatrix} |36| & 0 & 0 \\ 0 & |36| & 0 \\ 0 & 0 & |36| \end{vmatrix} ; \qquad B.a = |36| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

De esto se puede afirmar que $B.a = |B|$, de donde:

$$B^{-1} = \frac{a}{|B|}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|36|}\begin{vmatrix} 11 & -5 & 4 \\ 3 & 15 & -12 \\ -5 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{11}{36} & -\frac{5}{36} & \frac{4}{36} \\ \frac{3}{36} & \frac{15}{36} & -\frac{12}{36} \\ -\frac{5}{36} & -\frac{1}{36} & \frac{8}{36} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{11}{36} & -\frac{5}{36} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{36} & -\frac{1}{36} & \frac{2}{9} \end{vmatrix}$$

Para su verificación hay que multiplicar $B.B^{-1}$, el producto resultante es una matriz idéntica.

Se pide al lector que realice la operación para comprobar lo expuesto. Para fortalecer el conocimiento, se solicita encontrar la inversa por el método gaussiano.

GUÍA DE ESTUDIO 22

Objetivo

Evidenciar conocimiento de matrices en el cálculo de la adjunta y la inversa de una matriz cuadrada de segundo, tercer y cuarto orden.

Actividades

Durante el tiempo destinado para trabajo autónomo, resuelva los siguientes ejercicios:

1. Aplicando el proceso gaussiano calcule la inversa, si existe en las matrices siguientes:

   a) $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$,

   b) $B = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$,

   c) $C = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$,

   d) $D = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

   e) $E = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -7 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

   f) $F = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

   g) $M = \begin{vmatrix} 6 & -6 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

2. Por el método de los cofactores (adjunta), determine la inversa de las siguientes matrices:

a. $A=\begin{vmatrix}2 & -3 & 2\\3 & -1 & 4\\2 & 0 & 3\end{vmatrix}$

b. $B=\begin{vmatrix}3 & -5 & 7\\2 & 0 & -1\\1 & 2 & 6\end{vmatrix}$

c. $C=\begin{vmatrix}3 & 7\\8 & 0\end{vmatrix}$

d. $D=\begin{vmatrix}3 & 2\\5 & -1\end{vmatrix}$

e. $E=\begin{vmatrix}-1 & 5 & 2 & 1\\1 & 8 & 2 & 3\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 3 & 2\end{vmatrix}$

f. $F=\begin{vmatrix}-3 & 3 & 0\\0 & 2 & 1\\-7 & 1 & 6\end{vmatrix}$

g. $G=\begin{vmatrix}2 & 5 & 3\\4 & 0 & 2\\2 & 3 & 2\end{vmatrix}$

h. $H=\begin{vmatrix}3 & 7\\2 & 1\end{vmatrix}$

3. La adjunta de la matriz $A=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\-1 & 2 & 3\\4 & 0 & -1\end{vmatrix}$, es: _____

a. $a=\begin{vmatrix}-2 & 11 & -8\\-3 & -6 & -12\\-11 & -7 & 1\end{vmatrix}$

b. $a=\begin{vmatrix}-2 & -3 & -11\\11 & -6 & -7\\-8 & -12 & 1\end{vmatrix}$

c. $a = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -11 \\ 11 & -6 & -7 \\ -8 & -12 & 1 \end{vmatrix}$

d. $a = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 11 \\ 11 & -6 & -7 \\ -8 & -12 & 1 \end{vmatrix}$

4. La inversa de la matriz $A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$, es: ______

a. $A^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{3}{26} & \frac{5}{26} \end{vmatrix}$

b. $A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{3}{26} & \frac{5}{26} \end{vmatrix}$

c. $A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{3}{26} & \frac{5}{26} \end{vmatrix}$

d. $A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{3}{26} & \frac{5}{26} \end{vmatrix}$

5. La inversa de la matriz $B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, es: ______

a. $B^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{7}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -3 & 3 & 3 \\ -\frac{5}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{vmatrix}$

b. $B^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{7}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -3 & 3 & 3 \\ \frac{5}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{vmatrix}$

c. $B^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{7}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -3 & 3 & 3 \\ -\frac{5}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{vmatrix}$

d. $B^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{7}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -3 & 3 & 3 \\ -\frac{5}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{vmatrix}$

Facetas

PLANEACIÓN TRADICIONAL Y PLANEACIÓN ESTRATÉGICA

Con el fin de tener presente los conceptos de planeación tradicional y planeación estratégica, Chamba M et al. (1997), presentan el siguiente cuadro comparativo:

Punto de observación	**Planeación Tradicional**	**Planeación Estratégica**
Origen	Antes de 1970	A partir de 1975
Valor apreciado	Eficiencia	Eficiencia
Sistema	Cerrado	Abierto
Proceso	Deductivo	Inductivo
Medio ambiente	Estable	Cambiante
Medio ambiente	Interno	Externo
Información	Cuantitativa	Cuantitativa Cualitativa
Período	Largo y discontinuo	Mediano y corto plazo Descentralizada e integrada
Estructura	Centralizada y paralela Adquirida	Cuestionada Evolutiva
Sobrevivencia	Determinista	Múltiples decisiones
Finalidad	Plan	Decisión actual a partir de futuro
Producto	Decisiones para el futuro	

Cuadro basado en las ideas de Robert Cone y de Suzane Feenev (p.148)

Analice cada uno de los puntos de observación en forma matricial y comente sobre trabajos realizados para determinada asignatura.

4.6 Resolución de sistemas de ecuaciones mediante matrices

Los sistemas de ecuaciones se pueden representar con matrices aumentadas, para luego aplicar el procedimiento gaussiano y encontrar los valores de las incógnitas, en otros términos se considera algunas propiedades de la determinante de una matriz.

Ejemplo 4.40: Considere es sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+2y=2 & (1) \\ x-3y=1 & (2) \end{cases}$$

Solución:

Intercambiando las ecuaciones, escribiendo los coeficientes en una matriz cuadrada y los términos independientes en una matriz aumentada, se obtiene:

$\left|\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 11 & -1 \end{array}\right|$, multiplicando la primera fila por – 3 y sumando a la segunda fila

$$= \left|\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{11} \end{array}\right|$$, dividiendo la segunda fila por 11

$$= \left|\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & \dfrac{8}{11} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{11} \end{array}\right|$$, multiplicando por 3 la segunda fila y sumando a la primera fila

$x=\dfrac{8}{11}$; $y=-\dfrac{1}{11}$. Por lo tanto, el conjunto solución es $\left(\dfrac{8}{11},-\dfrac{1}{11}\right)$

Verificación

Sustituyendo los valores en las ecuaciones

$$3\left(\frac{8}{11}\right)+2\left(-\frac{1}{11}\right)=2\Rightarrow\frac{24}{11}-\frac{2}{11}=2\Rightarrow\frac{22}{11}=2\Rightarrow 2=2$$

$$\frac{8}{11}-3\left(-\frac{1}{11}\right)=1\Rightarrow\frac{8}{11}+\frac{3}{11}=1\Rightarrow\frac{11}{11}=1\Rightarrow 1=1$$

Otra forma de verificación es utilizando la regla de Cramer

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}}=\frac{-6-2}{-9-2}=\frac{-8}{-11}=\frac{8}{11}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{-11}=\frac{3-2}{-11}=-\frac{1}{11}$$

Ejemplo 4.41: Por el proceso gaussiano resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}3x-2y+2z=1 & (1)\\ 2x+3y-z=2 & (2)\\ x+y-2z=-1 & (3)\end{cases}$$

Solución:

$$\left|\begin{array}{ccc}3 & -2 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{array}\right\|\left.\begin{array}{c}1\\ 2\\ -1\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccc}1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -2 & 2\end{array}\right\|\left.\begin{array}{c}-1\\ 2\\ 1\end{array}\right|$$, intercambiando la primera y tercera filas

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\0 & 1 & 3\\0 & -4 & 8\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-1\\4\\4\end{vmatrix}$$

Multiplicando la primera fila por – 2 y sumando a la segunda fila
Multiplicando la primera fila por – 3 y sumando a la tercera fila

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 20\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-1\\4\\20\end{vmatrix}$$, multiplicando por 4 la segunda fila y sumando a la tercera fila

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-1\\4\\1\end{vmatrix}$$, dividiendo por 20 la tercera fila

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & -5\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-5\\4\\1\end{vmatrix}$$, multiplicando por – 1 la segunda fila y sumando a la primera fila

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0\\4\\1\end{vmatrix}$$, multiplicando por 5 la tercera fila y sumando a la primera

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}$$, multiplicando por – 3 la tercera fila y sumando a la segunda fila

Por lo que: x=0; y=1; z=1. El conjunto solución es (0, 1, 1)

Verificación:

3(0) – 1 + 2(1) = 1

2(0) + 3(1) – 1 = 2

0 + 1 – 2(1) = – 1

Otra forma de verificación del sistema de ecuaciones con tres incógnitas es aplicando la regla de Cramer. Se solicita al lector comprobar por este método. Sugerencia revisar otros métodos de solución.

GUÍA DE ESTUDIO 23

Objetivo

Fomentar el conocimiento del estudio de matrices con la práctica de resolución de sistemas de ecuaciones.

Actividades

En forma individual o en equipo, resolver los ejercicios que señala esta guía.

1. Encuentre el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones por el proceso gaussiano.

a. $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ x-3y+2z=1 \\ 2y-5z=2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+2y-z=1 \\ 3x-2z=5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-1 \\ 3x_2+x_3=2 \\ 2x_1+x_2-2x_3=4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x_1+2x_2=-2 \\ 3x_1+2x_2-x_3=-1 \\ x_1+x_2-2x_3=3 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 2x-5y=4 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 4x-7y=5 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 2x_1 = 5 - 3x_2 \\ 4x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 5 = 3x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 - x_1 = 6 \end{cases}$

2. Todos los ejercicios del punto 1, resuelva aplicando la regla de Cramer.
3. De su propia iniciativa escriba tres sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, tres sistemas de ecuaciones con tres incógnitas y resuelva por el proceso gaussiano. Verifique aplicando la regla de Cramer.

UNIDAD 5

NÚMEROS COMPLEJOS

Contenidos

Objetivos
Al final de la unidad el estudiante podrá:

- Definir un número complejo.
- Identificar las características de los números complejos.
- Representar gráficamente los números complejos.
- Realizar operación con números complejos.
- Encontrar las raíces complejas.
- Realizar ejercicios en forma polar, exponencial y potencia de los números complejos.
- Estudiar las funciones trigonométricas complejas y funciones hiperbólicas.

5.1 Antecedentes

La referencia inicial de los números complejos se encuentra en Herón de Alejandría (20 – 62 d.c), ingeniero y matemático griego, inventó un método de aproximación a las raíces cuadradas y cubicas no exactas.

Los números complejos aparecen el período del renacimiento, particularmente en el libro Ars magna del matemático, físico y filósofo italiano Girolamo Cardano (1501 – 1576), publicado en 1545.

En el año 1539 Cardano recibió mucho conocimiento del matemático Tartaglia, ganador de concursos sobre resolución de ecuaciones utilizando métodos secretos, fue especialista en el estudio de las trayectorias de proyectiles.

L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

Bombelli, nació en 1526 en Bolonia, se dedicó a la ingeniería, conoció los trabajos sobre ecuaciones cubicas de Cardano, puede ser llamado el padre de los números complejos, inició el desarrollo de algebra formal y parece la expresión $a+b\sqrt{-1}$.

René Descartes (1596 – 1650) rechazó las raíces complejas y bautizó con el nombre de imaginarios.

Los números complejos se utilizaron en el Siglo XVIII, Leibniz y Johan Bernoulli (Suizo, 1667 – 1748) utilizaron en la solución de integrales.

Leonhard Euler (Suiza, 1707 – 1783) considerado uno de los más brillantes maneja la expresión $e^{\pi i} = -1$, introdujo la letra i para dar nombre a la unidad imaginaria, en esa época se tiene a Gauss y Newton grandes exponentes de la ciencia.

Caspar Wessel (1745 – 1818) matemático noruego (1796), escribió a interpretación geométrica de los números complejos documento que no trascendió, más tarde llegaron a las mismas conclusiones Gauss y Argand.

Karl Gauss, matemático alemán demostró el Teorema fundamental del álgebra: **"Todo polinomio con coeficientes complejos tiene a menos una raíz compleja"**

Recuperado de https://rotrujil.webs.ull.es/WebAMVI/HISTORIA.pdf

En la actualidad la aplicación de los números complejos se da en:

- Electricidad y electrónica: circuitos eléctricos, las corrientes alternas, cálculo de impedancias, resonancia, etc.
- Navegación para la ubicación de una posición.
- Contabilidad, problemas de interés simple y de seguros.
- La relatividad espacial.
- Cálculo diferencial e Integral.
- Informática para el dibujo y animación en dos dimensiones usando lenguajes de programación.
- Geometría para trasformaciones en el plano: traslaciones, giros, homotecias, simetrías y proyecciones ortonormales.
- Trigonometría.

5.2 Definición

Definición 5.1: Toda expresión en forma rectangular o binómica a + bi, donde a y b son números reales (Re), i es la unidad imaginaria que representa a $\sqrt{-1}$. Se denota por:

$$C = \{a + bi / a, b \in \mathrm{Re}\}$$

5.3 Características

- **El opuesto de z =** $a+bi$ **es – z =** $-a-bi$

- **Elemento neutro O = (0,0)**

- **Si a = 0,** $z = bi$ **, es número imaginario puro**

- **Si b = 0,** $z = a$ **, es un número real puro**
- **Si** $z = a+bi$ **, su conjugado es** $\bar{z} = a-bi$

<u>Propiedades del conjugado complejo</u>

a. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

b. $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$

c. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

d. $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}} \, si \quad \bar{w} \neq 0$

e. $\bar{z} = z$, si y solo si z es real

f. $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

g. $|z|z = z\bar{z} = \bar{z}z$

h. $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} \, si \quad z \neq 0$

Ejemplo 5.1: Dados los $z_1 = 6$, $z_2 = 3i$, $z_3 = 2+3i$ y $z_4 = -5+4i$. Encontrar:

a) $\overline{z_1}$, b) $\overline{z_2}$, c) $\overline{z_3}$, d) $\overline{z_4}$ y e) $\overline{z_3 + z_4}$

Solución:

a. $\overline{z_1} = -6$

b. $\overline{z_2} = -3i$

c. $\overline{z_3} = 2-3i$

d. $\overline{z_4} = -5-4i$

e. $\overline{z_3 + z_4} = \overline{z_3} + \overline{z_4} = (2-3i)+(-5-4i) = 2-3i-5-4i = -3-7i$

- **Dos números complejos son iguales cuando las componentes reales e imaginarias son las mismas.**

- **Potencias de la unidad imaginaria i**

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 i = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

$i^7 = -i$

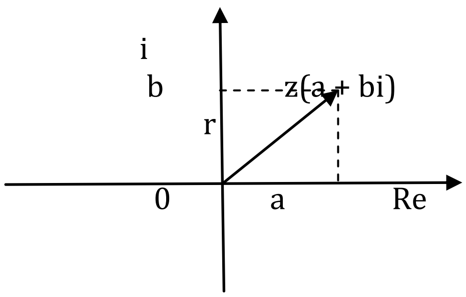
$i^8 = 1$

Como se observa se da en forma cíclica, de esto se puede decir que si $i^{19} = -i$, en otros términos $i^{16}i^{3} = 1(-i) = -i$, con este procedimiento se puede encontrar cualquier potencia de base i.

5.4 Representación geométrica del número complejo

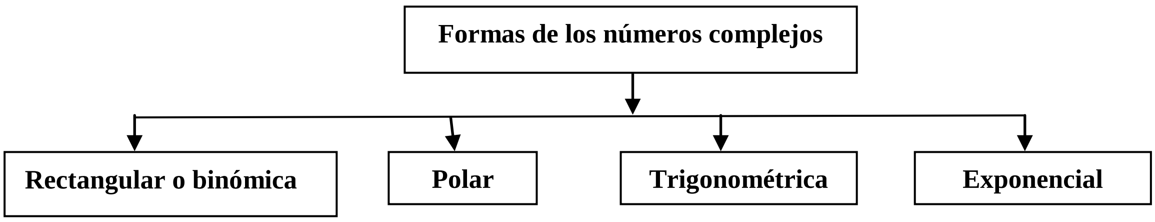
La representación geométrica de un número complejo z =a + bi en el plano cartesiano fue descubierto por los matemáticos el danés Casper Wessel y posteriormente por el suizo J Argand por el año 1806, a partir de esta fecha se conoce con el nombre de Diagrama de Argand.

Se representa en dos ejes, el eje horizontal R y el eje vertical i (imaginario)



Gráfica 5.1: Número complejo

5.5 Formas de los números complejos



5.6 Propiedades del producto de complejos

5.6.1 Conmutativa

Definición 5.2: Dados dos complejos a + bi y c + di, se cumple:

(a + bi).(c + di) = (c + di) (a + bi)

Ejemplo 5.2: Aplicar la propiedad conmutativa en el producto (2 – i)(3 + 2i)

(2 - i).(3 + 2i) = 6 + 4i - 3i -2i ^{2} = 6 + i - 2(-1) = 8 + i

(3 + 2i).(2 - i) = 6 – 3i + 4i -2i ^{2} = 6 + i - 2(-1) = 8 + i

5.6.2 Asociativa

Definición 5.3: Dados los complejos a + bi, c + di y e + fi, se cumple:

[(a + bi) (c + di)](e + fi) = (a + bi) [(c + di) (e + fi)]

Ejemplo 5.3: Dados los complejos (2 + i), (3 – 2i), (2 + 3i), aplique la propiedad asociativa.

$$[(2+i)(3-2i)](2+3i)=(2+i)[(3-2i)(2+3i)]$$

$$(6-4i+3i-2i^2)(2+3i)=(2+i)(6+9i-4i-6i^2)$$

$$(6-i+2)(2+3i)=(2+i)(6+5i+6)$$

$$(8-i)(2+3i)=(2+i)(12+5i)$$

$$16+24i-2i-3i^2=24+10i+12i+5i^2$$

$$16+22i+3=24+22i-5$$

$$19+22i=19+22i$$

5.6.3 Elemento neutro

Definición 5.4: El elemento neutro del producto es 1 + 0 i = 1, puesto que para cualquier complejo

a + bi , (a + bi) (1 + 0 i) = (a + bi)1 = a + bi.

El elemento neutro es el uno.

5.6.4 Distributiva del producto con respecto a la suma

Definición 5.5: Dados tres números complejos a + bi, c + di y e + fi, se cumple:

(a + bi).[(c + di) + (e + fi)] = (a + bi) (c + di) + (a + bi).(e + fi)

Ejemplo 5.4: Dados los números complejos (1+3i), (2 – i), (3 – 2i). Aplicar la ley distributiva.

$$(1+3i)[(2-i)+(3-2i)]=(1+3i)(2-i+3-2i)=(1+3i)(5-3i)=5-3i+15i-9i^2=14+12i$$

$$(1+3i)(2-i)+(1+3i)(3-2i)=(2-i+6i-3i^2)+(3-2i+9i-6i^2)=(2+5i+3)+(3+7i+6)=14+12i$$

El conjunto de los números complejos, al tener todas las propiedades anteriores para la suma y para el producto, se dice que es un anillo conmutativo.

5.6.5 Elemento simétrico respecto del producto

Definición 5.6: Dado un complejo cualquiera a + bi, distinto de 0 + 0 i, existe otro complejo que, multiplicado por él, da como resultado el elemento neutro del producto, es decir, 1 + 0 i.

***Demostración*:**

Para calcular el inverso de a + bi , x + yi.

Hay que verificarse (a + bi) (x + yi) = 1 + 0 i

(a + bi).(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx) i . Por lo tanto:

ax - by = 1, multiplicando por a se tiene: a^2 x - aby = a

bx + ay = 0, multiplicando por b se tiene: **b^2 x + aby = 0**

Sumando (a^2 + b^2).x = a ; $x=\frac{a}{a^2+b^2}$

Despejando y en: ay + bx = 0

$$ay = -bx \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x$$

Sustituyendo x y simplificado se tiene:

$$y = -\frac{b}{a}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

El inverso de un número complejo

Definición 5.7: El **inverso** de **un número complejo z = a + bi**, se denota por

$$\frac{1}{z} = z^{-1}$$

Por tanto, si z = a + b.i, el inverso es:

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$$

El conjunto de los números complejos es un cuerpo conmutativo con la suma y el producto definidos.

5.6.6 División de números complejos

Definición 5.8: La división es la operación inversa de la multiplicación. Esto es, dividir un número complejo entre otro es el resultado de multiplicar el primero por el inverso del segundo.

Ejemplo 5.5: Dividir $\frac{z}{w}$, siendo z = 3 – 2.i y w = 1 - i.

Solución:

$$\frac{3-2i}{1-i} = \frac{(3-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+i-2i^2}{1-i^2} = \frac{3+i+2}{1+1} = \frac{5+i}{2}$$

Ejemplo 5.6: Efectuar la operación $\frac{(2-3i)(3+2i)}{(2+i)-(1+3i)}$

Solución:

$$\frac{6+4i-9i-6i^2}{1-2i}=\frac{6-4i+6}{1-2i}=\frac{12-4i}{1-2i}$$

$$\frac{1}{1-2i}=\frac{1}{1^2-2^2}-\frac{2i}{1^2-2^2}=-\frac{1}{3}+\frac{2i}{3}$$

$$\frac{12-4i}{1-2i}=(12-4i)\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i\right)=-4+8i+\frac{4}{3}i-\frac{8}{3}i^2=-4+\frac{8}{3}+\frac{28}{3}i=-\frac{4}{3}+\frac{28}{3}i$$

5.7 Raíces cuadradas de un número complejo

Ejemplo 5.7: Hallar las raíces cuadradas del complejo 5 + 12 i.

Solución:

Sea a + bi una de las raíces cuadradas. Entonces:

$$5+12i=(a+bi)^2=a^2+2abi+(bi)^2=a^2+2abi-b^2=(a^2-b^2)+2abi$$

Para que los complejos sean iguales, deben tener iguales la parte real y la parte imaginaria. Por tanto:

$$a^2-b^2=5 \quad (1)$$

$$2ab=12 \Rightarrow b=\frac{6}{a} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1): $a^2-\frac{36}{a^2}=5 \Rightarrow a^4-36=5a^2 \Rightarrow a^4-5a^2-36=0$

Resolviendo ecuación bicuadrada por descomposición, se tiene:

$$(a^2-9)(a^2+4)=0$$

Considerando el primer factor se obtiene dos raíces

$$a^2-9=0 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=\pm 3$$

Sustituyendo en 2, se obtiene:

$$a=3; b=\frac{6}{3}=2$$

$a = -3; b = -\frac{6}{3} = -2$

Las raíces cuadradas o conjunto solución de 5 + 12i , son:

$[(3+2i),(-3-2i)] = \pm(3+2i)$

5.8 Raíces complejas de las funciones cuadráticas

Definición 5.9: Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ para encontrar la solución entre otros métodos se aplica la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **.**

Para ver si las raíces son reales o complejas, se analiza el discriminante $b^2 - 4ac$**,** si:

1. $b^2 - 4ac > 0$, hay raíces reales
2. $b^2 - 4ac < 0$**,** las raíces de la ecuación son números complejos

La forma z = a + bi, y z = a – bi

Ejemplo 5.8: Calcular las raíces de $3x^2 + 2x + 5 = 0$

Solución:

$b^2 - 4ac$ **=** $2^2 - 4(3)(5) = 4 - 60 = -54$, por lo tanto, la ecuación tiene números complejos.

Si x = z

$3z^2 + 2z + 5 = 0$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(3)(5)}}{2(3)}$$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-60}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{-56}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{14}\sqrt{-1}}{6}$$

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{14}i}{3}$$

$$z_1=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{14}i}{3}$$

$$z_2=-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{14}i}{3}$$

Ejemplo 5.9: Encontrar un polinomio de grado 4 que tenga por raíces – 3i y – 4 + 2i.

Hay que considerar que el polinomio de coeficientes reales tiene una raíz imaginaria como también su conjugada. Por lo tanto las raíces son: - 3i, 3i, - 4 + 2i y – 4 – 2i

$$x=-3i \Rightarrow x+3i$$

$$x=3i \Rightarrow x-3i$$

$$x=-4+2i \Rightarrow x+4-2i$$

$$x=-4-2i \Rightarrow x+4+2i$$

$$\left(x^2-9i^2\right)\left(x^2+4x+2xi+4x+16+8i-2xi-8i-4i^2\right)$$

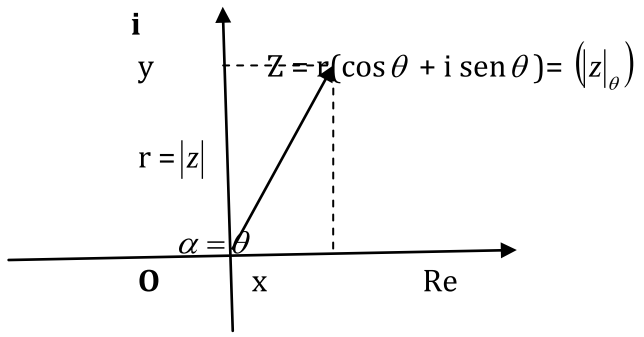
$$\left(x^2+9\right)\left(x^2+8x+16+4\right)=\left(x^2+9\right)\left(x^2+8x+20\right)$$

5.9Forma polar, exponencial y potencias de un número complejo

5.9.1 Forma Polar

Definición 5.10: Sea r y θ, coordenadas polares en el punto (x = a, y = b) que corresponde al número complejo Z = x + yi; como x = r cosθ; y = r sen θ. Z = r(cosθ + y senθ).
(Gráfica 4.5)

En el análisis de los números complejos no se acepta r negativos



Gráfica 4.5: Número complejo en forma polar

$r = |z|$, se llama **módulo**; θ, se denomina **argumento**

Para calcular el módulo se aplica el Teorema de Pitágoras $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, y para el argumento se considera lo siguiente:

$\alpha = \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, cuando se trata en el primer cuadrante

$\theta = 180^0 - \alpha = \arctan\left(\frac{y}{-x}\right)$, para el segundo cuadrante

$\theta = 180^0 + \alpha = \arctan\left(\frac{-y}{-x}\right)$, para el tercer cuadrante

$\theta = 360^0 - \alpha = \arctan\left(\frac{-y}{x}\right)$, para en cuarto cuadrante

Ejemplo 5.10: Convertir en forma polar el binomio z = – 3 + 4i

Solución:

$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\theta = 180^0 - \alpha = \arctan\left(\frac{y}{-x}\right) = 180^0 - 53^0 7`48{,}77`` = 126^0 52`11{,}6``$

Z = $5_{126^0 52`11{,}6``}$

Ejemplo 5.11: Convertir en forma polar z = 1 – 2i

Solución:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\theta = 360^0 - \alpha = \arctan\left(\frac{-2}{1}\right) = 360^0 - 63^0 26`5{,}82`` = 296^0 33`54{,}1``$$

$$Z = \left(\sqrt{5}\right)_{296^0 33`54{,}1``}$$

5.9.1.1 Multiplicación de números complejos en forma polar.

Definición 5.11: El módulo del producto de dos números complejos es el producto de sus módulos y el argumento es la suma de sus argumentos. El producto se representa:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

Ejemplo 5.12: Dados los números $z_1 = 3(\cos 45^o + isen 45^o)$ y $z_2 = 5(\cos 30^o + isen 30^o)$. Calcular el producto.

Solución:

$$z_1.z_2 = (3)(5)\left[\cos(45^o + 30^o) + isen(45^o + 30^o)\right]$$

$$z_1.z_2 = 15(\cos 75^o + isen 75^o)$$

5.9.1.2 División de números complejos

Definición 5.12: El módulo del cociente de dos números complejos es el cociente de los módulos y el argumento es la diferencia de sus argumentos. La expresión algebraica del cociente es:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\theta_1 + isen\theta_1)}{|z_2|(\cos\theta_2 + isen\theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

Ejemplo 5.13: Dados los números $z_1 = 8(\cos 60º + isen60º)$ y $z_2 = 2(\cos 20º + isen20º)$, calcular el cociente.

Solución:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8(\cos 60º + isen60º)}{2(\cos 20º + isen20º)} = 4[\cos 40º + isen40º]$$

5.9.2 Forma exponencial de un número complejo

Definición 5.13: La forma exponencial de un número complejo, está dada por la relación con las funciones trigonométricas del seno y coseno, llamada relación de Euler. Se expresa por: $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$

Si $Z = r(\cos\theta + isen\theta)$, relación de Euler admite representar Z en forma exponencial

$$Z = re^{i\theta}$$

Raíz enésima del número complejo en forma polar

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = \sqrt[n]{|z|_\theta}$$

- El módulo es $r = \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[n]{r}$
- El argumento es $\alpha` = \dfrac{\alpha + 2\pi k}{n}$, k = 0, 1, 2, 3, …, (n – 1)

Ejemplo 5.14: Hallar la raíz cúbica de $x^3 + 8 = 0$

Solución:

$$x^3 = -8$$
$$x = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(-1)} = \sqrt[3]{8_{180^0}}$$

$$\alpha = \frac{180^0 + 360^0 k}{3} \begin{cases} k = 0 & \alpha_1 = 60^0 & Z_1 = \left(\sqrt[3]{8}\right)_{60^0} \\ k = 1 & \alpha_2 = 180^0 & Z_2 = \left(\sqrt[3]{8}\right)_{180^0} \\ k = 2 & \alpha_3 = 300^0 & Z_3 = \left(\sqrt[3]{8}\right)_{300^0} \end{cases}$$

Ejemplo 5.15: Calcular el valor del cociente y las raíces cuadradas de $\frac{i^5 - i^{-5}}{2i}$

Solución:

$$\frac{i^5 - i^{-5}}{2i} = \frac{i^5 - \frac{1}{i^5}}{2i} = \frac{\frac{i^{10} - i}{i^5}}{2i} = \frac{i^{10} - 1}{2i^5} = \frac{-1-1}{-2} = 1$$

$$Z = 1; Z = \sqrt{1+0} = 1$$

$$\alpha = \arctan \frac{1}{0} = 90^0$$

$$Z = 1_{90^0}$$

$$|Z| = \sqrt{1_{90^0}}$$

$$\alpha = \frac{90^0 + 360^0 k}{2} \begin{cases} k = 0 & \alpha_1 = 45^0 & Z_1 = 1_{45^0} \\ k = 1 & \alpha_2 = 225^0 & Z_2 = 1_{225^0} \end{cases}$$

5.9.3 Potencias de un número complejo

La potencia de un número complejo es otro número complejo:

- El módulo es la potencia enésima del módulo.
- El argumento es n veces el argumento

$$(r_\theta)^n = \left(|Z|_\theta\right)^n = r^n_{n\theta}$$

- Dado $Z = |Z|(\cos\theta + isen\theta)$, entonces:

$$Z^n = |Z^n|\left[\cos(n\theta) + isen(n\theta)\right]$$ **Fórmula de Moivre**

Ejemplo 5.16: $\left(2_{30^0}\right)^5 = 2^5_{5.30^0} = 32_{150^0}$

Ejemplo 5.17: Hallar Z^5 de $Z = \sqrt{3} + i$

Solución

$$|Z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{5}$$

$$Z = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + isen\frac{\pi}{5}\right)$$

$$Z = 2^5\left[\cos\left(5\frac{\pi}{5}\right) + isen\left(5\frac{\pi}{5}\right)\right]$$

$$Z = 32(\cos\pi + isen\pi)$$

$$Z = -32$$

Ejemplo 5.18: Calcular Z^4 de: $Z = 4\left(\cos 30^0 + isen30^0\right)$

Solución:

$$Z^4 = 4^4\left(\cos 4.30^0 + isen4.30^0\right)$$

$$Z^4 = 256\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$Z^4 = \frac{256}{2}\left(-1 + \sqrt{3}i\right)$$

$$Z^4 = -128 + 128\sqrt{3}i$$

Ejemplo 5.19: Calcular el número $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right)^{100}$

Solución:

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i\right)^{100}=[1(\cos 30^{o}+isen30^{o})]^{100}=1^{100}[\cos(100)(30^{o})+isen(100)(30^{o})]$$

$$=1(\cos 3000^{o}+isen3000^{o})=1[\cos(8.360^{o}+120^{o})+isen(8.360^{o}+120^{o})]$$

$$=1(\cos 120^{o}+isen120^{o})=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

5.10 Funciones trigonométricas complejas y funciones hiperbólicas

5.10.1 Funciones trigonométricas complejas

Funciones trigonométricas del seno y el coseno en el plano complejo están dadas por las expresiones:

$$senz=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

Demostración:

$e^{iz}=\cos z+isenz$ (1)

$e^{-iz}=\cos z-isenz$ (2)

Sumando miembro a miembro,

$e^{iz}+e^{-iz}=2\cos z$

Despejando $\cos z$

$$\boxed{\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}$$

Para encontrar $senz$, se cambia de signo la ecuación (1) y,

$-e^{iz}=-\cos z-isenz$

$$e^{-iz} = \cos z - isenz$$

Sumando miembro a miembro,

$$-e^{iz} + e^{-iz} = -2isenz$$

$$2isenz = e^{iz} - e^{-iz}$$

$$\boxed{senz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$$

Propiedades

$\forall z, w \in C$, se dan las propiedades:

- $sen(z) = -sen(z)$
- $\cos(-z) = \cos z$
- $\cos^2 z + sen^2 z = 1$
- $sen(z+w) = sen(z)\cos(w) + sen(w)\cos(z)$
- $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - sen(z)sen(w)$

GUÍA DE ESTUDIO 24

Objetivo

Evidenciar conocimiento, habilidades y destrezas en las definiciones y descripción de las operaciones de los números complejos en sus diversas formas.

Actividades

Para resolver cada uno de los ejercicios se recomienda formar equipos de dos estudiantes o en forma individual, el desarrollo de la guía se realizará en el tiempo destinado para el trabajo autónomo.

1. Dados los números $z_1 = 4+3i$, $z_2 - 4+5i$, $z_3 = \dfrac{2}{3}$, $z_4 = -2i$ y $z_5 = -3-2i$.

   Encuentre: a)

   a. $z_1 + z_2$
   b. $z_2 - z_3 + z_4$
   c. $\left(z_1 + \overline{z_2}\right) - \left(\overline{z_3} + z_4\right)$
   d. $\dfrac{z}{\overline{z_5}} + \overline{z_4}$
   e. $\overline{\overline{z_2 + z_3 + z_4}}$
   f. $\overline{z_2 + z_4 - \overline{z_3}}$
   g. $\dfrac{\overline{z_1 - z_2}}{z_3 + z_4}$
   h. $\overline{(z_3 + z_2)\overline{\left(z_4 - \overline{z_5}\right)}}$

2. Encontrar en forma polar los números complejos siguientes:

   a. $z = 5 - 7i$
   b. $z = -6 + 3i$
   c. $z = -2 - 5i$
   d. $z = -4 + 9i$
   e. $z = (4 - 3i) - (-5 - 4i)$
   f. $z = 7 + (-4 + 5i)$

g. $z = -5 - (7 - 3i)$

3. Multiplique los números complejos en forma polar:

   a. $z_1 = 5\left(\cos 30^0 + isen30^0\right)y \quad z_2 = 2(\cos 20^o + isen20^o)$

   b. $z_1 = -3(\cos 40^o - isen40^o)\,y \quad z_2 = 4(\cos 50^o + isen50^o)$

   c. $z_1 = -6(\cos 15^o + isen15^o) \quad y \quad z_2 = -2(\cos 30^o - isen30^o)$

   d. $z_1 = 7(\cos 25^o + isen25^o) \quad y \quad z_2 = -2(\cos 35^o - isen35^o)$

4. Divida los siguientes números complejos:

   a. $z_1 = 10\left(\cos 35^0 + isen35^0\right)por \quad z_2 = 2(\cos 20^o + isen20^o)$

   b. $z_1 = -15(\cos 60^o - isen60^o)\,por \quad z_2 = 5(\cos 50^o + isen50^o)$

   c. $z_1 = 14(\cos 45^o + isen45^o) \quad por \quad z_2 = -2(\cos 35^o - isen35^o)$

   d. $z_1 = 25(\cos 65^o + isen65^o) \quad y \quad z_2 = -10(\cos 35^o - isen35^o)$

5. Hallar la raíz cubica de:

   a. $x^3 + 27 = 0$

   b. $x^6 + 64 = 0$

   c. $x^3 + 126 = 0$

6. Calcular el valor del cociente y las raíces cuadradas de

   a. $\dfrac{i^7 - i^{-7}}{3i}$

   b. $\dfrac{i^6 - i^{-6}}{3i}$

UNIDAD 6

NOTACIÓN SIGMA

6.1 La notación Σ

La letra griega Σ fue utilizada por el matemático suizo Leonard Euler (1707 – 1783) para denotar la sumatoria.

> **Punto de apoyo**:
> Si la operación binaria es la suma se utiliza la letra griega Σ
>
> Si la operación binaria es un producto se utiliza la letra griega pi Π

6.2 Propiedades de la notación sigma Σ

Sean $|a_n|$ y $|b_n|$ sucesiones reales y sea c un número real. Por lo tanto

$$\sum_{k=M}^{N} ca_k = c\sum_{k=M}^{N} a_k$$

$$\sum_{k=M}^{N} (a_k + b_k) = \sum_{k=M}^{N} a_k + \sum_{k=M}^{N} b_k$$

$$\sum_{k=M}^{N} (a_k - b_k) = \sum_{k=M}^{N} a_k - \sum_{k=M}^{N} b_k$$

$$\sum_{k=M}^{N} a_k = \sum_{k=M}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{N} a_k \qquad \text{si} \quad M < m < N$$

También se deben considerar las formulas siguientes

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

6.3 Ejemplo demostrativos:

Ejemplo 6.1: Demostrar que $\sum_{k=M}^{N}(a_k + b_k) = \sum_{k=M}^{N} a_k + \sum_{k=M}^{N} b_k$

$$\sum_{k=M}^{N} a_k = (a_M + b_M) + (a_{M+1} + b_{M+1}) + (a_{M+2} + b_{M+2}) + --- + (a_N + b_N)$$

$$= (a_M + a_{M+1} + a_{M+2} + --- + a_N) + (b_M + b_{M+1} + b_{M+2} + --- + b_N)$$

$$= \sum_{k=M}^{N} a_k + \sum_{k=m+1}^{N} a_k$$

Ejemplo 6.2: Demostrar que $\sum_{k=M}^{N} a_k = \sum_{k=M}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{N} a_k$

$$\sum_{k=M}^{N} a_k = a_M + a_{M+1} + --- + a_m + a_{m+1} + a_N = (a_M + a_{M+1} + --- + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + --- a_N)$$

$$= \sum_{k=M}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{N} a_k$$

Ejemplo 6.3: Demostrar que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + --- + (n-1) + n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + --- + 2 + 1$$

Sumando estas igualdades término a término, se tiene:

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + (n-1+2) + (n-2+3) + --- + (n-1+2) + (n+1)$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + (n+1) + (n+1) + --- + (n+1) \text{ n términos}$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1) \text{ Por lo tanto}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo 6.4: Demostrar utilizando la inducción matemática que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

La fórmula se verifica para n=1, entonces la ecuación queda: $\sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6} = \frac{(2)(3)}{6} = 1$

Por lo cual, la fórmula es válida cuando n = 1. Ahora se supone que la fórmula es válida para n = k, pero k pertenece a cualquier entero positivo;

con esta suposición se quiere demostrar que la fórmula es válida para n = k + 1. Si la fórmula es válida n = k, entonces:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad (1)$$

Cuando n = k+1, se tiene

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + --- + k^2 + (k+1)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \text{ aplicando la ecuación (1)}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right][2(k+1)+1]}{6}$$

Por lo tanto la fórmula es válida para n = k + 1 y realizando las sustituciones del caso, se demuestra que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Ejercicios resueltos:

Ejemplo 6.5: Dada la notación: a) $\sum_{k=1}^{5} b_k$; b) $\sum_{k=4}^{7} c_k$; c) $\sum_{n=1}^{11} a_n$; d) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}$.

Encontrar la suma

Solución:

a) $\sum_{k=1}^{5} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$

b) $\sum_{k=4}^{7} c_k = c_4 + c_5 + c_6 + c_7$

c) $\sum_{n=1}^{11} a_n = a_1 + a_2 + --- + a_{11}$

d) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{31} + a_{32} + a_{33}$

Ejercicios propuestos

1. Dadas las sumas, expresar con la notación Σ

a) $a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} + a_{31} + a_{32}$

b) $1 + 2^{1/2} + 3^{1/3} + 4^{1/4} + 5^{1/5} + \ldots + n^{1/n}$

c) $3^{1/3} + 4^{1/4} + 5^{1/5} + 6^{1/6} + 7^{1/7} + 8^{1/8}$

d)

2. Encontrar la suma dada.

a) $\sum_{i=1}^{6} 3i + 2$

b) $\displaystyle\sum_{j=3}^{6}\frac{2}{j(j-2)}$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{8}(1+i)^2$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{i-2}$

e) $\displaystyle\sum_{k=-1}^{3}\frac{k}{k+2}$

Bibliografía

Negro, A. Pérez Cacho, S. *Enciclopedia de Matemática*. Editorial Alhambra. España 1979.

Pinzón, Á. *Problemas de Algebra Lineal*. Editorial Hispanoamericano S. L. Bogotá – Colombia.

Zambrano, A. *Matemática Moderna*. Editorial Don Bosco. Quito – Ecuador.

Biblioteca Básica Juvenil, *El libro del Cuando*. Editorial Grijalbo. México 1975.

Casio. *Calculadora Científica*. Manual.

Neira D., C. M., Ochoa C., C. A., Batista B., M., Herrera, O. E. *Matemáticas en construcción 7*. Oxford University Press – Harla de Colombia S. A. 1996.

Chamba Morales M., Mogrovejo Carrión J., *Administración y Planificación Educativa*. Compiladores. Loja – Ecuador. 1997

El Mercurio, *Diario. Suplemento Dominical* 178, 8 de marzo de 1998. Manta – Ecuador.

El Universo, Diario Nacional. 19, 29 de marzo de 1998. Guayaquil – Ecuador.

ESPOL. Fundamentos Matemáticos para bachillerato. 2006 Guayaquil - Ecuador

Budinik, F. S. *Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales*. México 1993.

González Sarmiento, M., Pérez Aguilar, G., Quezada, F., *Corrientes, Métodos y Técnicas de Investigación Educativa*. Gráficas Cosmos. 1996 Loja – Ecuador.

Rivero Mendoza, F. Una Introducción a los *Números Complejos* por Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de los Andes Merida – Venezuela marzo del 2001 *webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Libros/complejos.pdf*

Howar Taylor – Thomas L. Wade, *Matemáticas Básicas con Vectores y Matrices*. Editorial Limusa – Willey, S. A. Mèxico. 1971.

Hugh Grayson – Smith, *Los Conceptos Cambiantes de la Ciencia*. Unión Tipográfica. Editora Hispanoamericana Mèxico. 1969.

Instituto de Ciencias Matemáticas. ESPOL, *Apuntes Matemáticas Básicas*. Ecuador.

Silva, J. M. – Lazo, A. *Matemáticas. Biblioteca Científica y Tecnológica. Editorial Ciencia y Técnica*, S. A. Mèxico. 1998

Kolman, *Algebra Lineal*. Fondo Educativo Interamericano S. A. 1981.

Ashey, R. *Matemáticas Fundamentales para Computación*. Editorial Limusa. Mèxico. 1974.

Lipschuts, S. *Teoría de Conjuntos y Temas Afines*. Libros McGraw – Hill. Talleres Gráficos de Carvajal & Cía. de Cali – Colombia. 1973.

wikipedia.org/wiki/Matemática babilónica

thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matemáticas/14/historia.html

Recuperado www.biografiasyvidas.com/biografia/

Recuperado de http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/14/historia.html

Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Charles_Babbage

Recuperado de http://www.dosideas.com/noticias/actualidad/446-charles-babbage-el-padre-de-las-computadoras

Recuperado de https://rotrujil.webs.ull.es/WebAMVI/HISTORIA.pdf

Datos del autor

Pedro Augusto Moya Bustillos obtuvo su licenciatura en ciencias de la educación especialización físico - matemático en la Universidad Laica Vicente Rocafuerte Extensión Manta. Magister en Docencia Universitaria. Mención Investigación Educativa y en Administración de Empresas. Mención Recursos Humanos. La actividad académica fue en las funciones de coordinador en el Centro de Estudios de Posgrado y Capacitación Docente desde 1992 hasta el 2010 en la Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí, ULEAM; 35 años profesor de matemáticas en la Escuela de Computación Administrativa e Ingeniería de Sistemas de la ULEAM; 41 años profesor de matemáticas y física en el Colegio Técnico Nacional Manta, en la actualidad jubilado y profesor contratado con servicios en la FACCI de la ULEAM.

Uleam
UNIVERSIDAD LAICA
ELOY ALFARO DE MANABÍ

EDITORIAL
MAR ABIERTO