UNIVERSIDAD LAICA ELOY ALFARO DE MANABÍ

Guía de estudio | Geometría y Trigonometría

Dirección de Bienestar, Admisión y Nivelación Universitaria

2024

UNIVERSIDAD LAICA ELOY ALFARO DE MANABÍ

GUÍA DE ESTUDIO

Geometría y Trigonometría

Lic. Victor Geovanny Zambrano Cedeño

Ing. Rubén Antonio Zamora Cusme

Ing. Julio César Iglesias Loor

Ing. César Stalin Villavicencio Palacios

Ing. Jharol Antonio Ormaza Sabando

Ing. Douglas Héctor Ordoñez Valencia

Ing. Winston Andrés Zavala Alarcón

Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí
Ciudadela universitaria vía circunvalación (Manta)
www.uleam.edu.ec

Dr. Marcos Zambrano Zambrano, PhD.
Rector
Dr. Pedro Quijije Anchundia, PhD.
Vicerrector Académico
Dra. Jackeline Terranova Ruiz, PhD.
Vicerrectora de Investigación, Vinculación y Postgrado
Lic. Víctor Geovanny Zambrano Cedeño, Mg
Dirección de Bienestar, Admisión y Nivelación Universitaria

Guía de estudio
Geometría y Trigonometría

Lic. Victor Geovanny Zambrano Cedeño
Ing. Rubén Antonio Zamora Cusme
Ing. Julio César Iglesias Loor
Ing. César Stalin Villavicencio Palacios
Ing. Jharol Antonio Ormaza Sabando
Ing. Douglas Héctor Ordoñez Valencia
Ing. Winston Andrés Zavala Alarcón

ISBN: 978-9942-681-21-8

Edición: Primera. Diciembre de 2024. Publicación digital

Prohibida su venta

Trabajo de edición y revisión de texto: Mg. Alexis Cuzme Espinales
Diseño de portada: Mg. José Márquez Rodríguez

Una producción de la Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí, registrada en la Cámara Ecuatoriana
del Libro.

Sitio Web: uleam.edu.ec
Teléfonos: 2 623 026 Ext. 255

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En el presente apartado aplicaremos las nociones básicas sobre los ángulos entre rectas y figuras geométricas como los triángulos. Además, comprenderemos de manera abierta la aplicación del Teorema de Pitágoras. Al mismo tiempo analizaremos el espacio, en específico figuras como cono, cilindro y esfera, además de los puntos que están en el espacio. Desarrollaremos problemas básicos de operaciones vectoriales como suma, resta.

Al concluir reconoceremos la aplicación amplia de la geometría plana, geometría en el espacio, que nos permite con la diferente aplicación de ejercicios entender las nociones básicas que fundamentan estos temas.

«Dejadme practicar las buenas costumbres y les devolveré libertad y gloria».

Eloy Alfaro Delgado

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Unidad 1	Comprende y aplica las nociones básicas sobre los ángulos entre rectas y figuras geométricas como los triángulos. Además, conocerá de manera abierta la aplicación del Teorema de Pitágoras.
Unidad 2	Identifica y comprende los principios trigonométricos en sus diferentes elementos geométricos, para poder resolver ejercicios del sistema radial, ley de seno y coseno, e la fórmula de Herón.
Unidad 3	Desarrolla y comprende los principios de diversos problemas relacionados a la geometría del espacio, para resolver ejercicios sobre cuerpos en el espacio, encontrar la distancia entre dos puntos y distinguir las secciones cónica.
Unidad 4	Comprende los principios de diversos problemas relacionados a la geometría del espacio, para resolver planteamientos sobre los puntos en el espacio tridimensional dentro del plano, resolviendo productos vectoriales y escalar.

Resultados de las Unidades

UNIDAD 1

1 Geometría Plana

El movimiento de la punta de un lápiz sobre una hoja de papel nos da una imagen aceptable de lo que puede ser una "figura" plana, en particular una curva plana, algunas "abiertas", otras "cerradas", algunas "rectas", otras "curvas (Figueroa, 2010, p. 11).

1.1 Ángulos

“Es una región del plano comprendida entre dos rectas que se unen en un mismo punto llamado vértice. Los ángulos se miden siempre en sentido contrario a las agujas de reloj” (Islas Salomón, 2017, p. 53).

Los ángulos se los forma por la unión de tres puntos en el plano o en el espacio y al mismo tiempo se conforma dos lados o rectas que poseen una medida.

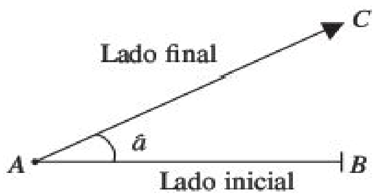


Ilustración 1 Ángulo

Los ángulos se pueden representar como: $(\angle A)$, $(\hat{A})$, $(\angle BAC)$, $(\widehat{ABC})$ o con letras minúsculas del alfabeto griego.

$$\angle\alpha \cong \angle\beta.$$

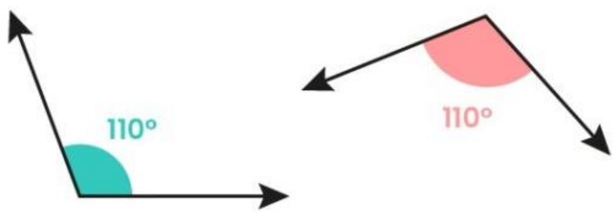


Ilustración 2 Signos y medidas de los Ángulos

<u>EJERCICIO DE APLICACIÓN 1:</u>

Le invito a dar clic en el siguiente enlace [Ejemplo 1.pdf]() para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo, utilizando la herramienta digital [GeoGebra]().

1.1.1 Clasificación de los ángulos según las medidas

Los ángulos según sus medidas se clasifican de acuerdo con su magnitud, esto nos indica que depende de su abertura entre sus dos lados y no la longitud de ellos. De acuerdo con lo indicado se presenta la siguiente tabla:

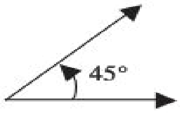
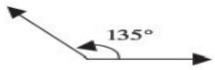
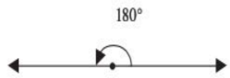
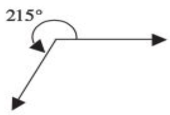
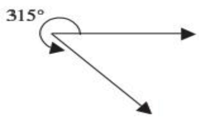
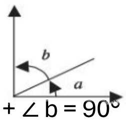
Agudo Es aquel que mide entre los 0° y menos de 90°  	**Recto** Es aquel cuya medida o magnitud es de 90°  	**Obtuso** Es el que su medida es entre los 90° y menor de 180°  	**Llano o de lados colineales** Es el que cuya medida es de 180° 
Cóncavo o entrante Es el cual sus medidas son mayores de 180° y menor de 360°   		**Perigonal o de vuelta entera** Es el que mide 360°  	**Complementarios** Es aquel donde la suma de sus dos ángulos es igual 90°.  $\angle a + \angle b = 90°$

Tabla 1. Clasificación de los ángulos según la medida.

<u>EJERCICIO DE APLICACIÓN 2:</u>

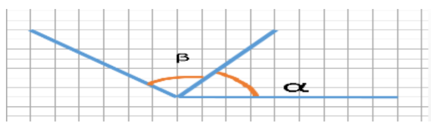
Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 2.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo, utilizando la herramienta digital GeoGebra.

1.1.2 Clasificación de ángulos por la posición

Los ángulos según su posición se clasifican de acuerdo con el vértice o ángulo que comparte dos ángulos.

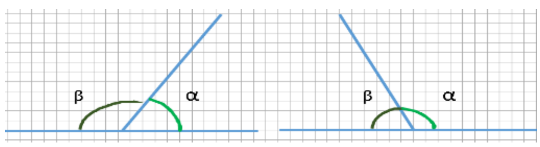
Consecutivos

Son aquellos ángulos que comparten el vértice y un lado.



Adyacentes

Comparten un lado y un vértice y la suma de sus medidas es 180° debido a que siempre hay un ángulo llano.



Opuestos por el vértice

Se forman a partir de líneas secantes formando 4 ángulos que comparten un mismo vértice, pero en realidad se trata de dos ángulos iguales.

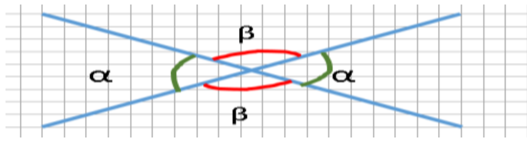


Tabla 2. Ángulos según la posición.

<u>EJERCICIO DE APLICACIÓN 3:</u>

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 3.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo, utilizando la herramienta digital GeoGebra.

Actividad 1

Utilizando la herramienta digital GeoGebra, crear 4 ángulos donde usted coloque las coordenadas de los 3 puntos y el vértice de los ángulos, además determine cuál es el valor del ángulo interno y externo.

La actividad desarrollada deberá ser subida en un solo documento PDF a la plataforma Moodle en el recurso **(TA1 – Actividades Unidad)**

1.1.3 Congruencia entre ángulos

Dos figuras geométricas son congruentes si tienen las mismas dimensiones y la misma forma, sin importar su posición u orientación, es decir, si existe una isometría que los relaciona.

Una transformación que puede ser de traslación, rotación o reflexión. Las partes relacionadas entre las figuras congruentes se llaman homólogas o correspondientes, en la Ilustración 4 se muestran los criterios de congruencia cuando existe una recta secante que corta dos rectas paralelas.

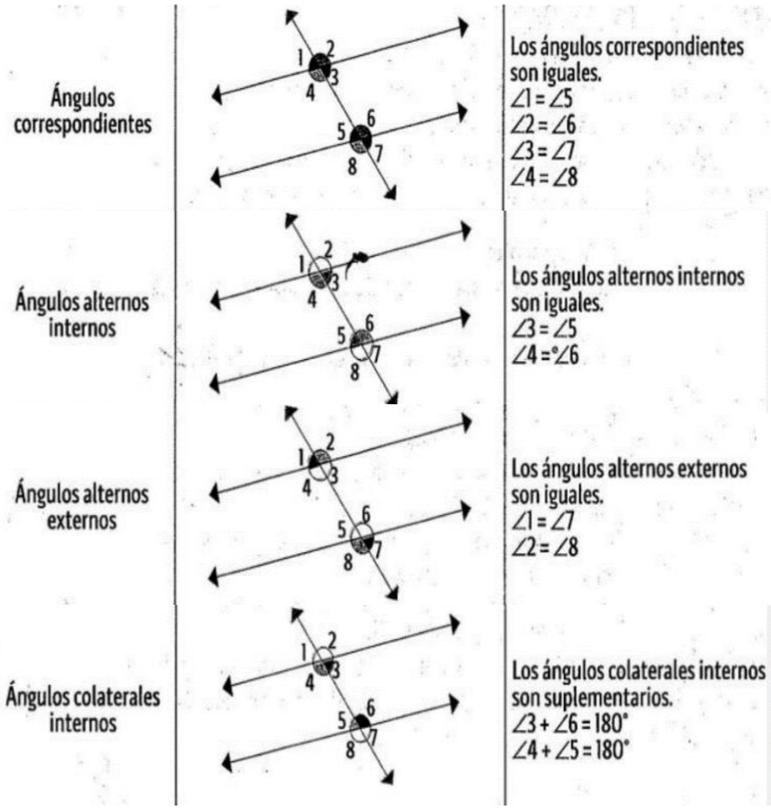


Ilustración 3. Ángulos entre rectas paralelas.

<u>EJERCICIO DE APLICACIÓN 4:</u>

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 4.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo, utilizando la herramienta digital GeoGebra.

Para continuar, es importante que refuerce su aprendizaje con el siguiente video sobre ángulos entre paralelas y una transversal.

1.2 Polígonos

Un polígono es una figura geométrica de puntos unidos por segmentos de recta que encierran una región en un plano bidimensional. A cada punto se le denomina vértice y se lo identifica mediante una letra mayúscula. (Geometría y trigonometría – Figueroa, 2010)

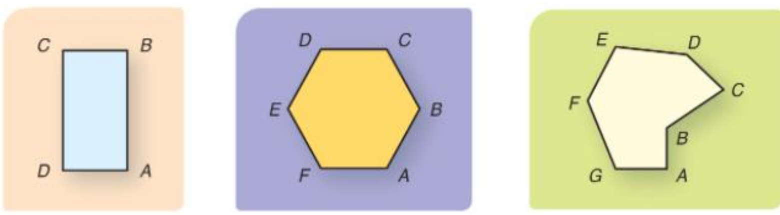


Ilustración 4. Representación de polígonos.

Como nos señala Carpinteyro, los elementos de un polígono son:

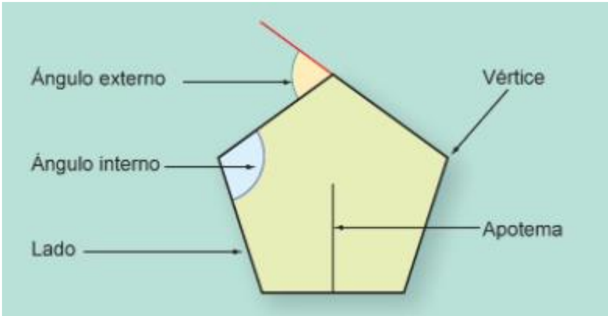


Ilustración 5. Elementos de un polígono.

Elemento	Descripción
Lados	Rectas que limitan al polígono.
Vértice	Es el punto donde se interceptan dos líneas o lados consecutivos.
Centro	Punto interior de un polígono regular, equidistante de todos los vértices.
Apotema	Segmento que une el centro de un polígono regular con el punto medio de uno de los lados.
Diagonal	Es la recta donde se interceptan dos vértices.
Ángulo interno	Se forma por dos lados consecutivos en el interior del polígono.
Ángulo externo	Se forma por un lado del polígono y la prolongación del lado adyacente. Todo ángulo externo es el suplemento de un ángulo interior adyacente.
Perímetro	Suma de todos los lados del polígono.
Radio	Segmento que une el centro de un polígono regular con cada uno de los vértices.

1.2.1 Definición de triángulos

Triángulo es la porción limitada por 3 rectas que se intersecan una a una en puntos llamados vértices (Márquez, 2010).

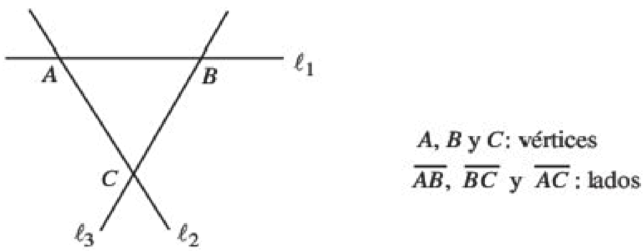


Ilustración 6. Triángulo

1.2.2 Clasificación de los triángulos por sus lados

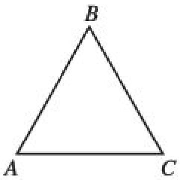
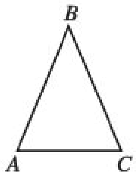
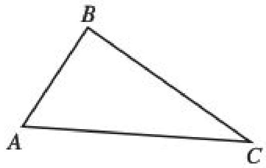
Triángulo equilátero Todos sus lados son iguales.	**Triángulo isósceles** Tiene 2 lados iguales.	**Triángulo escaleno** Sus lados son diferentes.
 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$	 $\overline{AB} = \overline{BC} \neq \overline{AC}$	 $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$

Ilustración 7. Triángulos por sus lados

1.2.3 Clasificación de los triángulos por sus ángulos

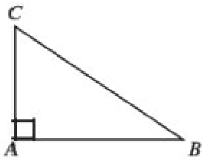
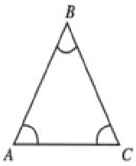
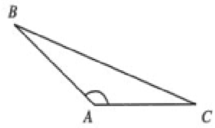
Triángulo rectángulo Tiene un ángulo recto.	**Triángulo acutángulo** Sus 3 ángulos son agudos.	**Triángulo obtusángulo** Es el que tiene un ángulo obtuso.
 $\angle A = 90°$	 $\angle A < 90°, \angle B < 90°$ y $\angle C < 90°$	 $\angle A > 90°$

Ilustración 8. Triángulos por sus ángulos

<u>EJERCICIO DE APLICACIÓN 5:</u>

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 5.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo, utilizando la herramienta digital GeoGebra.

Para continuar, es importante que refuerce su aprendizaie con el siguiente video sobre las propiedades de los triángulos.

Para continuar, es importante que refuerce su aprendizaje con el siguiente video sobre las rectas y puntos notables de los triángulos.

1.2.4 Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (Uribe, 2017).

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo tenemos lo siguiente:

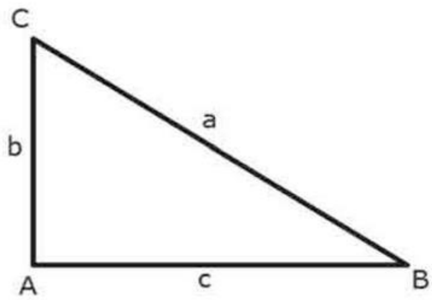


Ilustración 9. Triángulo Rectángulo (Salomón, Uribe y Téllez, 2017)

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

De esta fórmula se obtiene las siguientes:

Fórmula para encontrar la Hipotenusa

$$\boldsymbol{a = \sqrt{b^2 + c^2}}$$

Fórmula para encontrar uno de los catetos

$$\boldsymbol{b = \sqrt{a^2 - c^2}}$$

Fórmula para encontrar uno de los catetos

$$\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

Para continuar, es importante que refuerce su aprendizaje con el siguiente video sobre la aplicación del Teorema de Pitágoras.

EJERCICIO DE APLICACIÓN 6:

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 6.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo, utilizando la herramienta digital GeoGebra.

EJERCICIO DE APLICACIÓN 7:

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 7.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo, utilizando la herramienta digital GeoGebra.

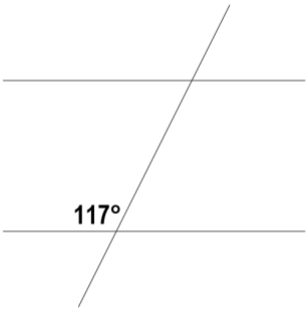
EJERCICIO DE APLICACIÓN 8:

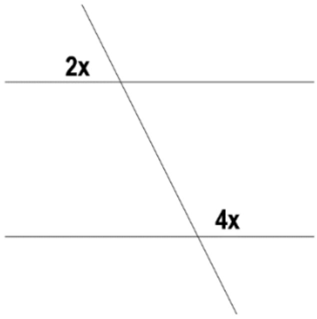
Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 8.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo, utilizando la herramienta digital GeoGebra.

Actividad 2

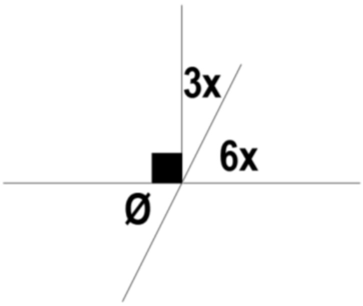
1.- Ángulos

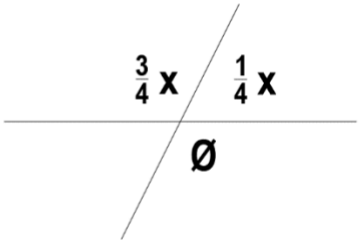
- Encuentre el valor de los ángulos que concurren al vértice



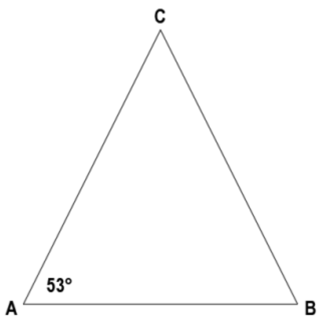


- Cuál es el valor del ángulo ø





2.-Dado el siguiente triángulo:



a) a=b
b) El ángulo externo de B=330°
c) A=c

La actividad desarrollada deberá ser subida en un solo documento PDF a la plataforma Moodle en el recurso **(TA1 – Actividades Unidad)**

UNIDAD 2

2 Trigonometría

2.1 Definición, conversión y aplicación del sistema radial

"Siempre que veo dos líneas que se cruzan, sé que el espacio entre las dos líneas forma un ángulo" (De Sousa, 2022).

2.1.1 Definición del sistema radial

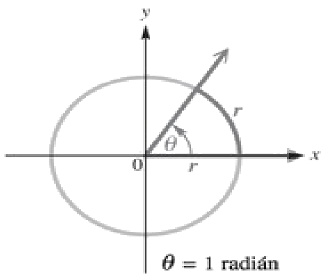


Ilustración 10. Radián

Se tiene que recordar que el Radián es una unidad de medida de ángulos en el Sistema Internacional de Unidades equivale al ángulo central que abarca un arco de longitud igual al radio. Al utilizar la igualdad de $\pi\,\mathbf{rad} = \mathbf{180º}$, esta nos ayudará a convertir o transformar a la unidad que necesitamos, como se muestra a continuación.

2.1.2 Definición del sistema radial

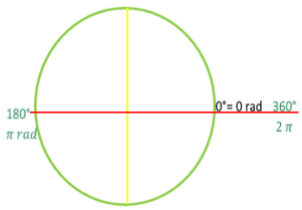


Ilustración 11. Conversión del sistema radial.

Para realizar conversiones entre grados – radianes y viceversa, debemos recordar utilizar la igualdad de π rad=180°, la cual nos ayudara a convertir o transformar a la unidad que necesitamos, como se muestra a continuación.

En el siguiente enlace tenemos un ejemplo de conversiones de unidades: [enlace]

Para continuar, es importante que refuerce su aprendizaje con el siguiente video sobre la conversión de grados a radianes y de radiantes a grados.

2.1.3 Aplicación del sistema radial

La aplicación de como calcular el radio o ángulo dentro de una circunferencia dada de denota con la fórmula:

$$\emptyset = \frac{L}{radio}$$

<u>EJERCICIO DE APLICACIÓN 9:</u>

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 9.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo.

<u>EJERCICIO DE APLICACIÓN 10:</u>

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 10.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo, utilizando la herramienta digital GeoGebra.

2.2 Identidades y signos trigonométricos elementales

2.2.1 Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas se clasifican en las siguiente: seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente, definidas por proporciones dependen sólo del ángulo y no del triángulo donde este se integre.

Podemos denotar de la figura anterior las siguientes razones o funciones trigonométricas (Ángulos agudos):

$$\mathbf{sen}\ x = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad \mathbf{csc}\ x = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

$$\mathbf{cos}\ x = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad \mathbf{sec}\ x = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$

$$\mathbf{tan}\ x = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \qquad \mathbf{cot}\ x = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

En el siguiente enlace tenemos la aplicación de las identidades trigonométricas: enlace

2.2.2 Signos trigonométricos

Para considerar valores de seno, coseno y tangente de los ángulos notables, dentro de un plano cartesiano donde cada cuadrante las funciones tienen sus respectivos signos, recuerda que la tangente en los ángulos llanos es 0 y si es perpendicular al eje de las abscisas es indefinida. **Fuente especificada no válida.**

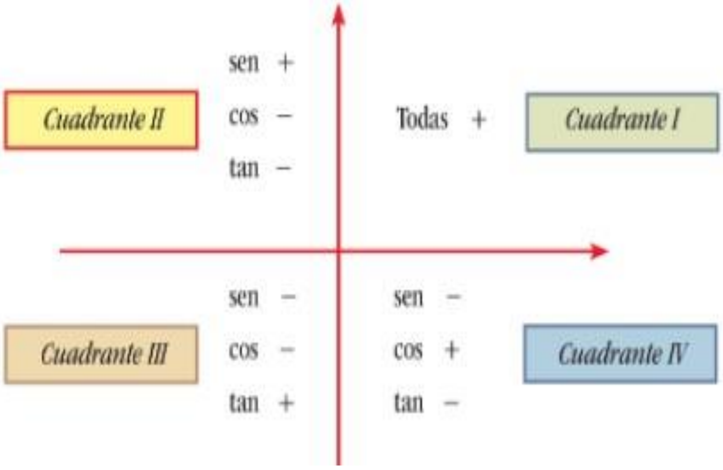


Ilustración 12. Signos trigonométricos

2.3 Leyes de: Seno, Coseno y fórmula de Herón

2.3.1 Ley del Seno

La ley del Seno y Coseno se aplica en triángulos oblicuángulos, acutángulos, agudos, etc. Se la emplea también cuando no se puede utilizar el Teorema de Pitágoras como en los triángulos rectángulos (Figueroa, 2010).

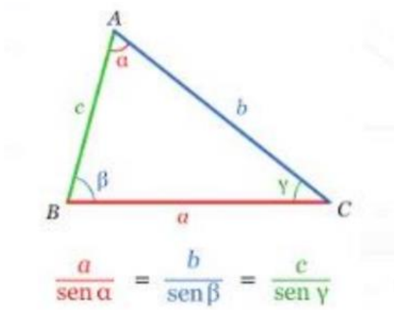


Ilustración 13. Aplicación de la ley del Seno en triángulos.

<u>EJERCICIO DE APLICACIÓN 11:</u>

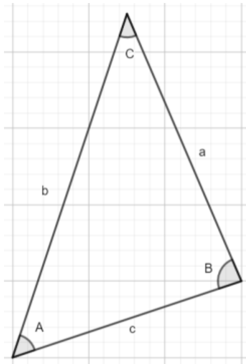
Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 11.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo.

2.3.2 Ley del Coseno

Nos indica que, un triángulo oblicuángulo, es igual al cuadrado de cada lado menos el doble producto del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman (Figueroa, 2010).

Para realizar la utilización de la ley de cosenos, en la resolución de problemas, es necesario entender que la podemos aplicar cuando tengamos los siguientes dos casos:

LLL: Tener todos los lados y no tener un ángulo en común.
LAL: Tener dos lados y el ángulo comprendido entre ellos



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 * a * c * \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos C$$

Ilustración 14. Aplicación de la ley del Coseno en triángulos.

Para encontrar uno de los lados, solo basta con elevar al cuadrado cada una de las variables de los otros dos lados, restando el producto de ambas variables, por el coseno del ángulo que es opuesto al lado, ya que queremos encontrar. Puedes encontrar también el valor de los ángulos despejando su valor:

<u>EJERCICIO DE APLICACIÓN 12:</u>

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 12.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo.

2.3.3 Fórmula de Herón

Esta fórmula permite calcular el área de un triángulo conociendo específicamente los tres lados de cualquier triángulo, en este caso no se necesita conocer la altura y ángulos, considera las siguientes fórmulas según el triángulo propuesto (Riquenes Rodríguez, 2007).

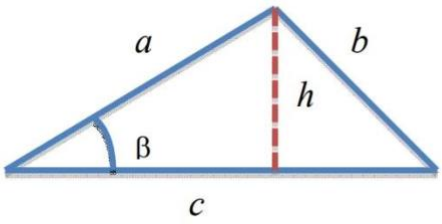


Ilustración 15. Aplicación de la fórmula de Herón.

Llamamos "s" al semiperímetro y (a, b, c) los lados del triángulo.

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Entonces el área puede expresarse como:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Para continuar, es importante que refuerce su aprendizaje con el siguiente video sobre la aplicación de la fórmula de Herón.

EJERCICIO DE APLICACIÓN 13:

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 13.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo.

Actividad 3

1.- Realice los siguientes ejercicios sobre la conversión de ángulos.

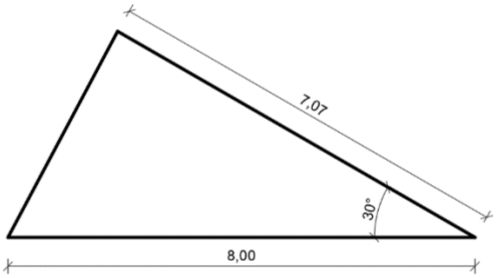
1. Convertir 350° a Π rad
2. Convertir 0.75 Π rad a grados
3. Convertir 5/8 Π rad a grados
4. Convertir 55° a Π rad

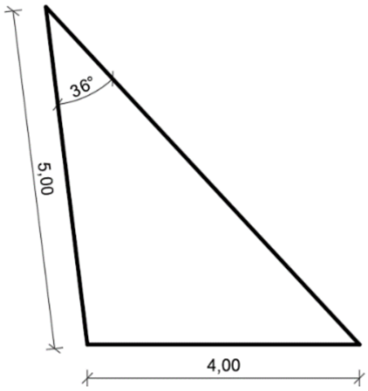
2.- Dada las siguientes coordenadas determine, la longitud de los dos arcos formados, el ángulo del vértice y el radio de los arcos:

A = (1, 1) B = (6, 1) C = (4, 5) D = (3, 1)

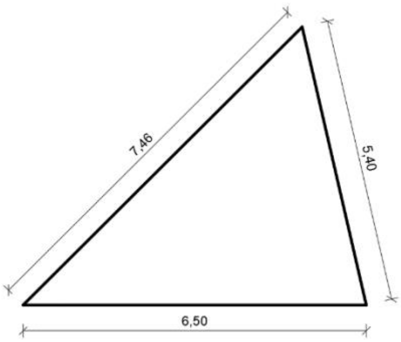
3.- Dada los siguientes triángulos, determine cuál ley debe aplicar para encontrar los ángulos o dimensiones de los lados de los triángulos.

a) b)

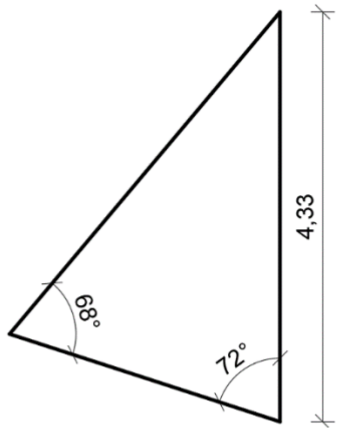




c)



d)



4.- Con la fórmula de Herón determine el área de los triángulos presentes en el numeral 3.

Luego de haber desarrollado la actividad, subirá su desarrollo en un documento PDF al recurso - **(TA2 – Actividades Unidad)**

UNIDAD 3

3 Cuerpos en el espacio y geometría analítica

Al hablar de cuerpos en el espacio hacemos referencia a la geometría espacial, donde sus volúmenes se encuentran distribuidos en el espacio tridimensional generando sólidos, entre las figuras representativas se encuentran los cilindros, conos y esferas (COLEGIO24HS. 2004).

3.1 Desarrollo sobre los cuerpos (cilindro, cono, esfera)

3.1.1 Cilindro

Se llama cilindro circular recto, o simplemente cilindro, que gira alrededor del eje que pasa por unos de sus lados (COLEGIO24HS, 2004).

Antes de iniciar con la resolución de los ejercicios debemos tener en cuenta los siguientes enunciados:

Altura. – La altura está determinada desde el centro de la base o circunferencia hasta la posición del vértice.
Base. – Generado por un círculo compuesto por el cateto del triángulo rectángulo.
PI. – Valor de 3.14

Fórmulas

Areas		Volumen
Área Base	$A_B = \pi \cdot r^2$	$V = A_B \cdot h$
Área Lateral	$A_L = 2\pi \cdot r \cdot h$	$V = \pi r^2 h$
Área total	$A_T = A_L + 2A_B$	
Área total	$A\,T = 2\pi \cdot r(h + r)$	

EJERCICIO DE APLICACIÓN 14:

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 14.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo.

3.1.2 Cono

El cono es un sólido donde se determina al rotar un triángulo sobre la superficie de un plano, sus principales características son; tener una base circular, generatriz producida por la hipotenusa del triángulo rectángulo y su vértice (COLEGIO24HS, 2004).

Antes de iniciar con la resolución de los ejercicios debemos tener en cuenta los siguientes enunciados:

- **Generatriz.** – Generada por el cateto contrario a la base, esta gira sobre su propio eje para formar el cono.
- **Altura.** – La altura está determinada desde el centro de la base o circunferencia hasta la posición del vértice.
- **Base.** – Generado por un círculo compuesto por el cateto del triángulo rectángulo.

Fórmulas

Generatriz / Áreas		Volumen
Generatriz	$g = \sqrt{r^2 + h^2}$	$V = \frac{1}{3} A_{\mathrm{B}} \cdot \mathrm{h}$
Área Base	$A_{\mathrm{B}} = \pi \cdot \mathrm{r}^2$	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
Área Lateral	$\mathrm{A_L} = \pi \cdot \mathrm{r} \cdot \mathrm{g}$	-
Área total	$A_T = A_L + A_{\mathrm{B}}$	-
Área total	$\mathrm{AT} = \pi \mathrm{r}(\mathrm{g} + \mathrm{r})$	-

EJERCICIO DE APLICACIÓN 15:

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 15.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo.

3.1.3 Esfera

Esfera es el conjunto de todos los puntos en el espacio, que se encuentran dentro de una misma distancia “r” del punto dado o central del espacio O (COLEGIO24HS, 2004).

Posee radio, diámetro y cuerda (con iguales definiciones a las dadas en la circunferencia). En otras palabras, se llama esfera (o cuerpo esférico) al conjunto de todos los puntos del espacio que se encuentran del centro a una distancia no mayor que la distancia r (radio).

La esfera se puede obtener por rotación de un semicírculo alrededor de su eje que contiene al diámetro del semicírculo.

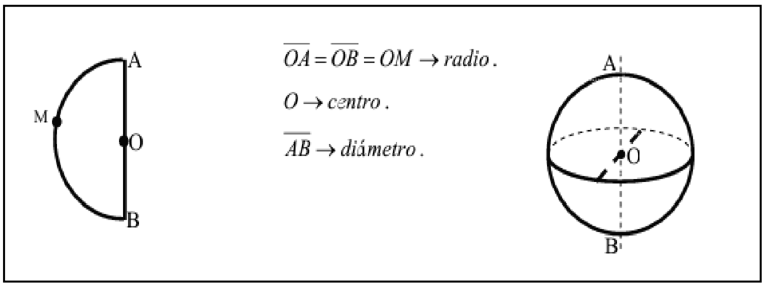


Ilustración 16. La esfera y sus partes.

Fórmulas

Área	Volumen
$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

EJERCICIO DE APLICACIÓN 16:

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 16.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo.

Para continuar, es importante que refuerce su aprendizaje con el siguiente video sobre el cilindro, el cono y la esfera.

Actividad 4

1) Conociendo que un cilindro de d=15cm y h=40cm, grafíquelo y calcule su área base, área lateral, área total y su volumen. Grafique en GeoGebra

2) Conociendo que un cono de d=20 cm y h = 55 cm, grafíquelo y calcule su área base, área lateral, área total y su volumen.

3) Conociendo una esfera de d= 25 cm, grafíquelo y calcule su área y su volumen.

Luego de haber desarrollado la actividad, subirá su desarrollo en un documento PDF al recurso – **(TA3 – Actividades Unidad)**

3.2 Distancia, pendiente y ecuación de la recta entre dos puntos

3.2.1. Distancia entre dos Puntos

La fórmula de distancia proporciona un método directo para calcular la distancia entre dos puntos P1 = (X1, y1) y P2 = (X2, y2), se denota por d (P1, P2), es: d (P1–P2) = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (Sullivan, 1997)

Si observamos podríamos indicar que la distancia entre los puntos:

En el eje (X) = (-4, 0) y (5, 0) es (5 – (-4)) = 5 + 4 = 9 unidades.
En el eje (Y) = (-4, 0) y (5, 0) es (0 – (-0)) = 0 + 0 = 0 unidades.

Si demostramos esta relación, se deben ubicar los puntos P1 = (x1, y1) y P2 = (x2, y2), en el mismo sistema de coordenadas, para luego formar un triángulo rectángulo, que conformara la hipotenusa (P1; P2) y emplearemos el Teorema de Pitágoras.

Como podemos demostrarlo, sean los puntos; P1 = (x1; y1) y P2 = (x2; y2), dos puntos en el plano cartesiano, la distancia entre los puntos P1 y P2 se denotada por d = $\mathbf{d} = |\mathbf{P}_1;\ \mathbf{P}_2|$ está dada por:

$$\mathbf{d} = |\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2| = \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 + (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)^2}$$

En la siguiente figura hemos localizado los puntos P1 (x1, y1) y P2 (x2, y2) así como también el segmento de recta $|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|$

SI al trazar por el punto P1, una paralela al eje (X) o abscisas, de igual manera por el punto P2, una paralela al eje (Y) e ordenadas, y éstas se interceptan en el punto (R), se determina que se conforma el triángulo rectángulo (P1; R; P2) y en el cual podemos aplicar el Teorema de Pitágoras :

$(\overline{P_1P_2})^2 = (\overline{P_1R})^2 + (\overline{RP_2})^2$ $\quad (\overline{P_1}P_2)^2 = |P_1P_2|^2$ $\quad \overline{\mathbf{P}_1}\mathbf{R} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ $\quad \overline{\mathbf{R}\mathbf{P}_2} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1$

Luego, $\quad |\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2| = \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 + (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)^2}$ $\quad \mathbf{d} = \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 + (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)^2}$

EJERCICIO DE APLICACIÓN 17:

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 17.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo.

3.2.2. Pendiente de una recta

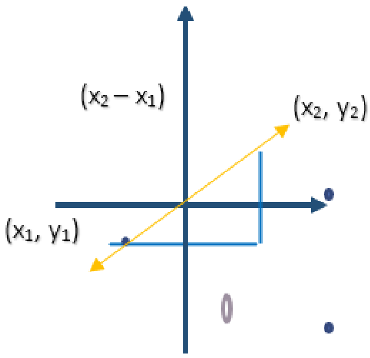


Ilustración 17. Pendiente de una recta

Conocidos dos puntos de una recta, A = (x1, y1); y B = (x2, y2), y la pendiente (m) de la misma se obtiene mediante la razón del incremento ($\Delta y = y2 - y1$), los valores en (Y) respecto del incremento ($\Delta x = x2 - x1$), de sus valores en (x).

También es importante conocer:

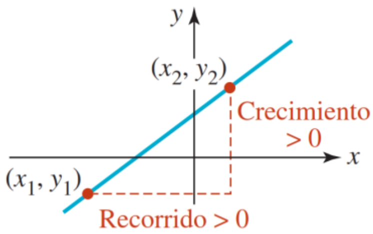
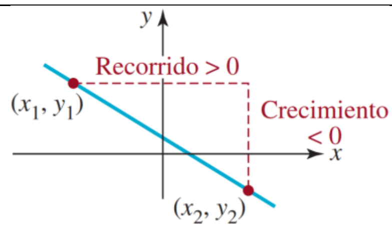
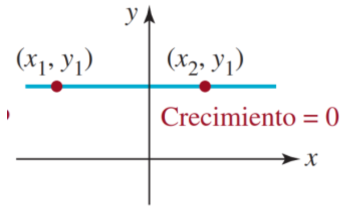
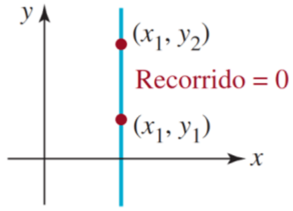
Que dos puntos cualesquiera de una recta determinaran la pendiente de la misma. Para entender por qué sucede así, considere los dos triángulos rectángulos semejantes de la siguiente figura, puesto que sabemos que las razones de los lados correspondientes en triángulos semejantes son iguales, tenemos:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

La inclinación del ángulo (α), y la pendiente de la recta estarán ligadas por la relación:

$$\tan \alpha = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

En la siguiente tabla, comparamos las gráficas de rectas con pendientes positiva, negativa, cero e indefinida.

Si observamos de izquierda a derecha, que la recta con pendiente positiva (m > 0) se eleva conforme x aumenta.	
Si se indica o nos muestra que una recta con pendiente negativa, (m < 0) desciende a medida que x aumenta.	
Si P1 (x1, y1) y P2 (x2, y2) son puntos sobre una recta horizontal, entonces y1=y2 y por tanto su elevación es y2−y1=0. Por lo tanto, tenemos que la pendiente es cero (m=0), por pasar por (1).	
Si P1(x1, y1) y P2(x2, y2) son puntos sobre una recta vertical, entonces x1=x2 y, por ende, el recorrido x2−x1=0. Por lo que podemos decir que la pendiente de la recta seria indefinida o que la misma no tiene pendiente.	

Para continuar, es importante que refuerce su aprendizaje con el siguiente video sobre pendiente y ecuación general de la recta.

3.2.3. Ecuación de la Recta

La forma de la ecuación de una recta contempla a las rectas verticales y a las que no lo son, dicha forma general, se obtiene pasando todos los términos de una ecuación a un miembro, de tal manera que este siempre quede igualado a cero. (ax+by+c=0) (Oteyza, 2005).

3.2.3.1. Ecuación general de la recta

Si se determinar una línea recta, sólo es seria necesario conocer los dos puntos **(A y B)**, dentro del plano cartesiano, con abscisas **(x)** y ordenadas **(y).**

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$$

Para hallar el ángulo de la pendiente generada con el eje de las abscisas se utiliza la siguiente formula:

$$\boldsymbol{m = tan\, x}$$

3.2.3.2. Ecuación ordinaria de la recta

Conocida también como ecuación punto pendiente, si conocemos la pendiente **(m)**, y el punto de la recta corta al eje **(Y)** u ordenadas es (**0, b**), corresponde a **n** en la fórmula principal ya indicada, podríamos deducir que partiendo de la ecuación de la recta de la forma:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - b = m(x - 0)$$
$$y - b = mx$$
$$\mathbf{y = mx + b}$$

Para continuar, es importante que refuerce su aprendizaje con el siguiente video sobre la ecuación ordinaria de la recta.

Actividad 5

1) Teniendo los puntos A = (−3, 4) y B = (5, −1), calcule la distancia entre los puntos y grafique en GeoGebra para su comprobación.

2) Con los puntos del numeral 1, determine la ecuación ordinaria de la recta.

Luego de haber desarrollado la actividad, subirá su desarrollo en un documento PDF al recurso – **(TA3 – Actividades Unidad)**

UNIDAD 4

4 Geometría del espacio

La estereometría o la geometría del espacio tridimensional, por lo general o efector didácticos se enseña siempre el final de la geometría básica, cual es considerada dentro de la geometría plana, siempre es probable que sea considerada por ser fácilmente o básica, representable en un dibujo (Arancibia, 2019).

4.1 Puntos alineados en el espacio

Se conoce como un plano en el espacio el cual está formado por una cantidad ilimitada de puntos y rectas, la manera de comprobar que 3 puntos se encuentren alineados o sean colineales en el espacio es que sean proporcionales (Arancibia, 2019).

Para la demostración de un ejercicio que pueden encontrar en alguno de los cuestionarios, sería recomendable apoyarse con la herramienta “GeoGebra 3D” donde gráficamente observarán que en los tres puntos están alineados al ser proporcionales.

<u>EJERCICIO DE APLICACIÓN 18:</u>

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 18.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo.

Para continuar, es importante que refuerce su aprendizaje con el siguiente video comprobar si tres puntos están en el espacio.

4.2 Ecuación del plano

Para encontrar la ecuación del plano es importante considerar que deben existir dos vectores, por ende, tres puntos. Estos deben ser no colineales, es decir, que no deben ser proporcionales (Figueroa, 2010).

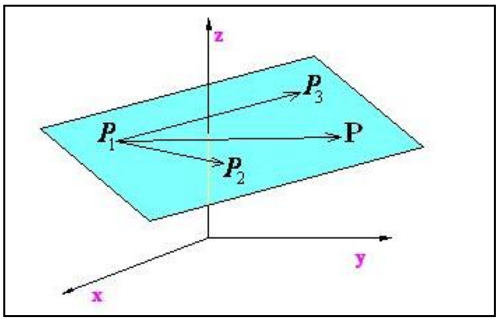


Ilustración 18. Vectores en el espacio

En la figura se observa que los vectores pueden ser traslados hasta el inicio o fin de otro vector que pertenezca a dicho plano, para la ecuación del plano debes considerar que puede ser demostrada de dos formas:

1. Conociendo dos vectores y un punto cualquiera.
2. Conociendo el vector normal y un punto cualquiera.

Si recordamos que siempre la unión de dos puntos determina un vector, podríamos indicar que, el vector:

$$\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$
$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$
$$\overline{P_1P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

Para el primer caso, debemos utilizar la fórmula de la ecuación general del plano la ecuación implícita del plano, la cual es:

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}$$

Es importante que, para este método de búsqueda de la ecuación se aplique cualquier método de resolución por determinantes, empleando a los dos vectores y las coordenadas de cada uno, esto les permitirá simplificar los valores y encontrar los valores de las incógnitas.

Para continuar, es importante que refuerce su aprendizaje con el siguiente video sobre la ecuación del plano.

4.3 Producto Vectorial y Escalar

3.2.4. Producto Vectorial

El producto vectorial también conocido como el producto cruz, es el método de multiplicación de dos vectores dando como resultado un vector normal o perpendicular al plano (Figueroa, 2010).

Es importante recordar que el producto vectorial se puede expresar mediante un determinante:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

EJERCICIO DE APLICACIÓN 19:

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 19.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo.

3.2.5. Producto Escalar

El producto escalar de vectores es un número real, se obtiene multiplicando las respectivas componentes y sumándolas, como puedes apreciar este resultado es la magnitud o el escalar del vector normal o perpendicular al plano (Figueroa, 2010).

EJERCICIO DE APLICACIÓN 20:

Le invito a dar clic en el siguiente enlace EJEMPLO 20.pdf para que pueda observar el ejemplo y el desarrollo.

Para continuar, es importante que refuerce su aprendizaje con el siguiente video sobre producto escalar y vectorial.

Actividad 6

1) Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos

   A = (2, 2, 2)
   B = (1, 3, 5)
   C = (0, 7, 3)

2) Producto vectorial – escalar de los vectores resultante

   BA y CA

Luego de haber desarrollado la actividad, subirá su desarrollo en un documento PDF al recurso – **(TA4 – Actividades Unidad)**

BIBLIOGRAFÍA

Arancibia. (2019).

Carreón, D. (23 de septiembre de 2019). ANGULOS ENTRE PARALELAS Y UNA TRANSVERSAL (EJERCICIOS) Super facil - Para principiantes. [video], nn, nn. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=m1WcxcDlNAY&t=1s

COLEGIO24HS. Circunferencia. ed. S.l: Colegio24hs, 2. (2004). *https://elibro.net/es/ereader/uleam/27047?page=2. Consultado en: 04 Apr 2023.*

Figueroa, M. (. (2010). *https://elibro.net/es/lc/uleam/titulos/36339.*

Figueroa, M. (2010). *https://elibro.net/es/ereader/uleam/36339?page=1. Consultado en: 04 Apr 2023.* Obtenido de Geometría y trigonometría. ed. Miami, FL:.

Geometría y trigonometría - Figueroa, M. F. (2010). *https://elibro.net/es/lc/uleam/titulos/36339.*

Instituto de Ciencias Matemáticas - ICM. (2006). Capítulo 4 - Trigonometría. En I. d.-E. ICM, *Fundamentos de Matemáticas para Bachillerato* (págs. 397-467). Guayaquil, Guayas, Ecuador: ICM-ESPOL.

Instituto de Ciencias Matemáticas - ICM. (2006). Capítulo 7 - Geometría Plana. En I. d.-E. ICM, *Fundamentos de Matemáticas para Bachillerato.* Guayaquil, Guayas, Ecuador: ICM-ESPOL.

Márquez, A. A., Vázquez, F. V., Ruiz, H. A., Villegas, M. C., & Figueroa., R. R. (2010). *Geometría, trigonometría y geometría analítica.* Mexico: Pearson.

Márquez, V. R. (2010).

Matemáticas con Grajeda. (10 de 11 de 2021). Determinar la ecuación ordinaria de la recta que pasa por dos puntos dados (video). Youtube. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=8qZImII4C8M&ab_channel=Matem%C3%A1ticasconGrajeda

Math2me. (29 de 11 de 2021). Fórmulas de Volumen de Cuerpos Geométricos | Cubo, Cono, Cilindro, Esfera, Prisma y Pirámide (video). Youtube. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=grLxT3i71D4&ab_channel=math2me

Oteyza. (2005).

Riquenes Rodríguez, M. (2007). *https://elibro.net/es/lc/uleam/titulos/71330.*

Sullivan. (1997).

TecnoMáticas. (17 de 02 de 2021). Ecuacion General de la Recta | Que pasa por dos puntos. Youtube. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=CtDjwbyloaY&ab_channel=TecnoM%C3%A1ticas

Teófilo de Sousa, R. V. (2022). *La teoria de los comcepto figurativo y GeoGebra: El concepto y l avisualización en Geometria dinámica .* Obtenido de chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://funes.uniandes.edu.co/31400/1/Te%C3%B3filo2022La.pdf

Uribe, S. y. (2017).

ISBN: 978-9942-681-21-8
9789942681218

Uleam
UNIVERSIDAD LAICA
ELOY ALFARO DE MANABÍ